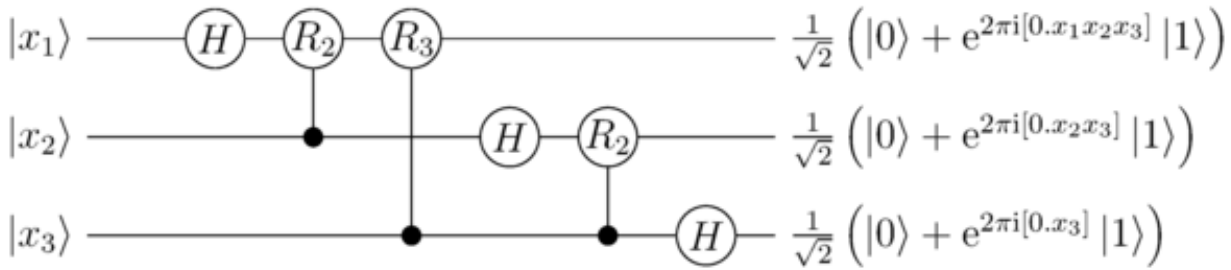
Inverse Quantum Fourier Transform

Analogamente al caso classico per trasformare un registro quantistico dal dominio di Fourier al dominio di partenza è necessario un operatore Trasformata di Fourier Inversa.

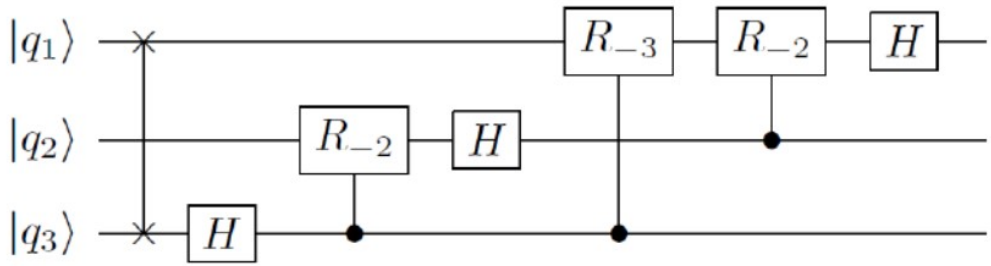
Consideriamo l'esempio visto nella lezione precedente, la QFT a 3 qubit:



Inverse Quantum Fourier Transform

Poiché la QFT è una trasformazione unitaria è certamente invertibile.

Considerando quindi l'esempio del circuito a 3 qubits, il circuito inverso sarà $(QFT^{\dagger})$



Inverse Quantum Fourier Transform

In particolare poiché la QFT è costituita da porte quantistiche unitarie, la QFT inversa si ottiene invertendo l'ordine di tutte le porte che costituiscono la QFT e prendendo la matrice ermitiana.

Quindi per l'operatore di Hadamard si ha

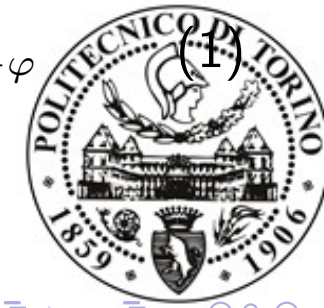
$$H^{\dagger} = H$$

per l'operatore di SWAP si ha:

$$\mathrm{SWAP}^{\dagger} = \mathrm{SWAP}$$

e per l'operatore di sfasamento si ha:

$$R_{\varphi}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2\varphi} \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/2\varphi} \end{bmatrix} := R_{-\varphi} \quad (1)$$



Quantum Phase Estimation:Algoritmo di Kitaev

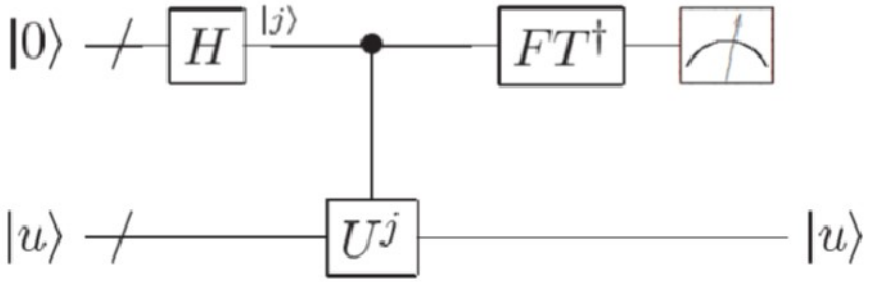
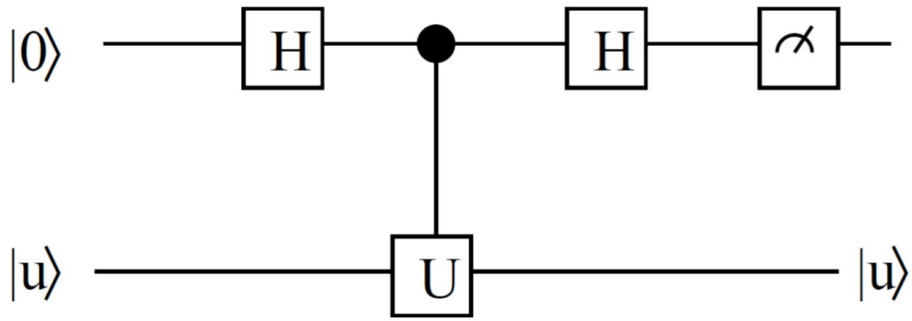


Figure 5.3. Schematic of the overall phase estimation procedure. The top t qubits (the '/' denotes a bundle o wires, as usual) are the first register, and the bottom qubits are the second register, numbering as many as rec to perform U. $|u\rangle$ is an eigenstate of U with eigenvalue $e^{2\pi i\varphi}$. The output of the measurement is an approximation to φ accurate to $t - \lceil \log\left(2 + \frac{1}{2\epsilon}\right) \rceil$ bits, with probability of success at least $1 - \epsilon$.



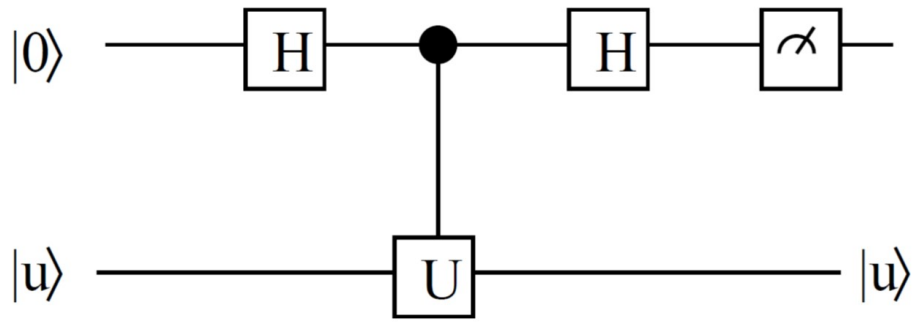
Algoritmo di Kitaev

Il circuito di Kitaev è un' alternativa al circuito di stima della fase (QPE) visto nelle diapositive precedenti. $|u\rangle$ è un autostato U con autovalori $e^{2\pi i\varphi}$.

Il qubit superiore ha una probabilità $p \equiv \cos^2(\pi\varphi)$ di essere misurato.

Lo stato $|u\rangle$ non è modificato dal circuito e può essere riutilizzato.

Se U viene sostituito con U^k, con k un intero arbitrario che possiamo controllare, ripetendo il circuito e aumentando k in modo opportuno, si possono avere bit multipli associati a probabilità p e quindi approssimazioni migliori di φ.



Algoritmo di Kitaev

Iniziamo con il sistema nello stato:

$$|0\rangle|u\rangle \tag{2}$$

Dopo l'operatore di Hadamard sul primo qubit, otteniamo

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u\rangle \tag{3}$$

Dopo la porta di controllo U si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{2i\pi\varphi}|1\rangle\right)|u\rangle \tag{4}$$

Dopo il secondo operatore di Hadamard si ha:

$$\frac{1}{2}\left[(|0\rangle + |1\rangle) + e^{2i\pi\varphi}(|0\rangle - |1\rangle)\right]|u\rangle \tag{5}$$

Algoritmo di Kitaev

Raggruppando le ampiezze dei vettori della base computazionale si ha:

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle\left(1+e^{2i\pi\varphi}\right)+|1\rangle\left(1-e^{2i\pi\varphi}\right)\right]|u\rangle \tag{6}$$

Da questa espressione si deduce che la probabilità per lo stato $|0\rangle$ di essere osservato è pari al modulo quadro dell'ampiezza, cioè:

$$\frac{\left|1+e^{2i\pi\varphi}\right|^2}{4}=\cos^2\pi\varphi$$

ricordando l'identità trigonometrica:

$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$$