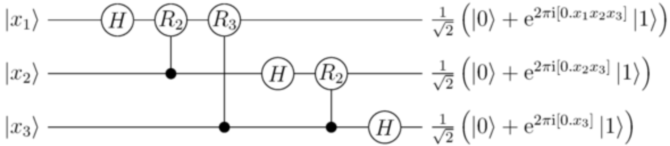
Quantum Fourier Transform

L'operatore R è centrale per il funzionamento del circuito QFT ed è quello che realizza lo sfasamento controllato.



L'operatore R è definito da:

$$R_k \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

Si verifichi che per $k = 1, 2, 3$ si ottengono rispettivamente le porte di rotazione di Pauli Z, S e T.

Quantum Fourier Transform: Esempio

$$R_k \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

Per $k = 1, 2, 3$ si osserva che si ottengono rispettivamente le porte di rotazione di Pauli Z, S e T.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = Z$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = S$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = T$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Si scriva la QFT per $N = 4 = 2^n$ con $n = 2$ cioè per 2-qubit:

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|00\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \tag{1}$$

Il 2-qubit QFT ha coefficienti: $b_k = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} a_j \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} jk/4}$,

$$b_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} a_j = \frac{1}{2}\left(a_{00} + a_{01} + a_{10} + a_{11}\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} a_j \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j/4} = \frac{1}{2}\left(a_{00} + a_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + a_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + a_{11}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2}\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} a_j \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} j/4} = \frac{1}{2}\left(a_{00} + a_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + a_{10}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} + a_{11}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi}\right)$$

$$b_3 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} a_j \mathrm{e}^{6\pi \mathrm{i} j/4} = \frac{1}{2}\left(a_{00} + a_{01}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} + a_{10}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi} + a_{11}\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/2}\right)$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Ponendo $\omega = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/2}$, si può scrivere il 2-qubit QFT in forma matriciale:

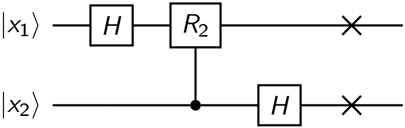
$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & 1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \tag{2}$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Notando che $\omega^4 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$ e $\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$, il 2-qubit QFT si può semplificare ulteriormente:

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \tag{3}$$

Quantum Fourier Transform: Esempio



Il primo operatore che si applica è Hadamard, che in forma matriciale si scrive:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Successivamente si applica R_2:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{5}$$

e poi ancora:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Infine l'operatore di SWAP:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Complessivamente quindi la QFT si scrive:

$$F = UH_2R_2H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \tag{8}$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Calcolare la trasformata di Fourier del qubit $|01\rangle$.

$$
\begin{aligned}
F_4|01\rangle &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_2]}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.x_1x_2]}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.1]}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.01]}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|0\rangle + e^{2\pi i/2}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i/4}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle + i|1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + i|01\rangle - |10\rangle - i|11\rangle)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

In forma matriciale:

$$F_4|01\rangle \equiv \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$F_4|01\rangle \equiv \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2}(|00\rangle + i|01\rangle - |10\rangle - i|11\rangle) \tag{11}$$

Quantum Fourier Transform: Esempio

Calcolare la QFT del qubit $\frac{\sqrt{3}}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$.

Il risultato si ottiene applicando la QFT a $|01\rangle$ e $|10\rangle$ e sommando i due risultati:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2} F_4|01\rangle + \frac{1}{2} F_4|10\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.1]}|1\rangle\right) \left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.01]}|1\rangle\right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.0]}|1\rangle\right) \left(|0\rangle + e^{2\pi i[0.10]}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle + i|1\rangle) + \frac{1}{4}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{4}|00\rangle - \frac{1-i\sqrt{3}}{4}|01\rangle + \frac{1-\sqrt{3}}{4}|10\rangle - \frac{i+\sqrt{3}}{4}|11\rangle
\end{aligned}
$$