Quantum Fourier Transform

La Trasformata di Fourier (FT) è uno degli strumenti matematici più utili in scienza e ingegneria. In particolare nelle sue varianti discrete (DFT e FFT) è diffusissima in ambito computazionale.

Le applicazione sono molto diverse, per esempio e' utilizzata per:

- determinare le ampiezze delle componenti periodiche di un segnale
- ripulire un segnale dal rumore
- analizzare le proprietà dei materiali (con strutture cristalline in parte)
- produrre ologrammi

La trasformata di Fourier discreta (DFT) permette di essere generalizzata e utilizzata anche in ambito quantistico dando origine ad uno strumento computazionale di notevole interesse.

Quantum Fourier Transform

Analogamente a quella classica, la Trasformata di Fourier Quantistica (QFT) è l'ingrediente computazionale chiave in molti algoritmi quantistici.

In particolare, osserviamo che la QFT:

- esegue la trasformata delle ampiezze quantistiche.
- permettere la stima della fase, mediante approssimazione degli autovalori di un operatore unitario sotto determinate condizioni.
- risolve il problema del "hidden subgroup" (sottogruppo nascosto), una generalizzazione della stima della fase e dei
- risolve il problema del "logaritmo discreto" che non ha soluzione in ambito classico.

Quantum Fourier Transform

La trasformata di Fourier discreta (DFT) riceve in ingresso un vettore di lunghezza N di numeri complessi $x_0, \ldots, x_{N-1}$ e restituisce in uscita un vettore di numeri complessi $y_0, \ldots, y_{N-1}$, secondo la relazione:

$$y_k \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi i jk/N} \tag{1}$$

Come vedremo, la quantum Fourier transform (QFT) usa esattamente la stessa definizione sebbene la notazione convenzionalmente utilizzata appaia differente.
La notazione utilizzata convenzionalmente per la QFT è la notazione di Dirac.

Quantum Fourier Transform

La trasformata di Fourier quantistica (QFT) è definita mediante un operatore lineare secondo la relazione seguente in termini dei vettori della base ortonormale $|0\rangle, \ldots, |N-1\rangle$:

$$|j\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ijk/N} |k\rangle \tag{2}$$

La relazione precedente può essere generalizzata per il caso di un vettore generico $|x\rangle$ nella forma:

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle \longrightarrow \sum_{k=0}^{N-1} y_k |k\rangle \tag{3}$$

dove le ampiezze y_k sono le trasformate discrete delle ampiezze x_j

Quantum Fourier Transform

Sia $N = 2^n$, con n intero e $|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |2^n - 1\rangle$ la base computazionale di un n-qubit.
Lo stato $|j\rangle$ può essere scritto nella rappresentazione binaria in termini delle componenti $j_1\ j_2\ \ldots j_n$, cioè: $j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n 2^0 \cdot$.

Si possono inoltre definire $0.j_l j_{l+1} \ldots j_m$ le quantità frazionarie corrispondenti a $j_l/2 + j_{l+1}/4 + \cdots + j_m/2^{m-l+1}$.

Con queste notazioni la trasformata di Fourier quantistica può essere anche scritta nella forma:

$$|j_1, \ldots, j_n\rangle \to \frac{\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right)\cdots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots}\right.}{2^{n/2}}$$

In questa forma la quantum Fourier transform (QFT) è utile per comprendere come costruire il circuito corrispondente della QFT, per provare che la QFT è unitaria e per confrontare la QFT con la classica FFT (Fast Fourier Transform).

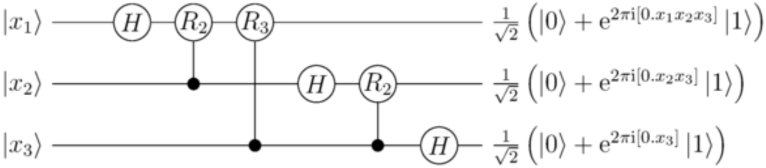
Quantum Fourier Transform

La notazione della quantum Fourier transform (QFT) della diapositiva precedente può essere ottenuta mediante i seguenti passaggi:

$$
\begin{aligned}
|j\rangle &\rightarrow \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk/2^n} |k\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} e^{2\pi ij\left(\sum_{l=1}^{n} k_l 2^{-l}\right)} |k_1 \ldots k_n\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_n=0}^{1} \bigotimes_{l=1}^{n} e^{2\pi ijk_l 2^{-l}} |k_l\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[\sum_{k_l=0}^{1} e^{2\pi ijk_l 2^{-l}} |k_l\rangle \right] \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \bigotimes_{l=1}^{n} \left[|0\rangle + e^{2\pi ij2^{-l}} |1\rangle \right] \\
&= \frac{\left(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_{n-1}j_n}|1\rangle\right)\cdots\left(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_1j_2\cdots j_n}|1\rangle\right)}{2^{n/2}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Quantum Fourier Transform

L'espressione della quantum Fourier transform (QFT) della diapositiva precedente può essere utilizzata per ottenere lo schema circuitale corrispondente, che nella figura sotto è rappresentato per un qubit triplo:



In questo circuito H è la porta di Hadamard, mentre R_k indica la trasformazione unitaria controllata definita dalla matrice:

$$R_k \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$

Quantum Fourier Transform

Per capire come costruire il circuito, consideriamo il qubit in ingresso $|j_1 \dots j_n\rangle$.

Applichiamo la porta di Hadamard al primo bit, si ottiene:

$$\frac{1}{2^{1/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0 j_1}|1\rangle\right)|j_2 \dots j_n\rangle$$

poichè $e^{2\pi i 0 j_1} = -1$ quando $j_1 = 1$, altrimenti è $e^{2\pi i 0 j_1} = +1$ quando $j_1 = 0$,.

Applichiamo quindi la porta unitaria controllata R_2, si ottiene:

$$\frac{1}{2^{1/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2}|1\rangle\right)|j_2 \dots j_n\rangle$$

Quantum Fourier Transform

Applichiamo successivamente le porte controllate $R_3, R_4, \ldots R_n$, che aggiungono ciascuna un bit alla fase del coefficiente di $|1\rangle$. Alla fine della procedura si ha lo stato:

$$\frac{1}{2^{1/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right)|j_2 \ldots j_n\rangle$$

Successivamente applichiamo la procedura al secondo qubit. La porta di Hadamard produce lo stato in uscita:

$$\frac{1}{2^{2/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_2}|1\rangle\right)|j_3 \ldots j_n\rangle$$

che gli operatori controllati $R_2 \ldots R_{n-1}$ trasformano in:

$$\frac{1}{2^{2/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right)|j_3 \ldots j_n\rangle$$

Quantum Fourier Transform

Si ripete la procedura per ogni qubit, ottenendo lo stato finale:

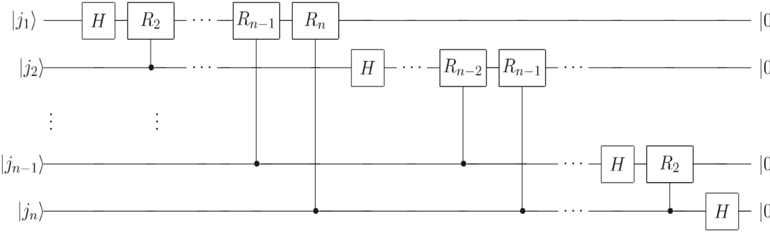
$$\frac{1}{2^{n/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_2 \ldots j_n}|1\rangle\right)\ldots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle\right)$$

Applicando infine un'operazione di swap si riordinano gli stati del qubits che si scrive quindi nella forma finale:

$$\frac{1}{2^{n/2}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_n}|1\rangle\right)\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_{n-1} j_n}|1\rangle\right)\ldots\left(|0\rangle + e^{2\pi i 0.j_1 j_2 \cdots j_n}|1\rangle\right)$$

. Come si può osservare la costruzione del circuito è basata unicamente su una composizione di operatori unitari, quindi dimostrando che l'operazione QFT è unitaria nel suo complesso.

Quantum Fourier Transform



Quantum Fourier Transform

Il circuito della QFT usa un operatore di Hadamard e $n-1$ rotazioni controllate sul primo qubit per un totale di n porte. Questa prima operazione è seguita da un operatore di Hadamard e $n-2$ rotazioni controllate sul secondo qubit, per un totale di $n+(n-1)$ porte e così via per un totale di $n+(n-1)+\cdots+1$ porte.

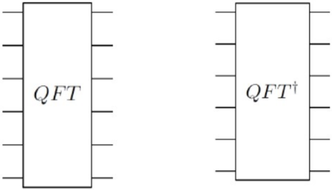
Infine ci sono gli operatori necessari per gli swaps in numero minimo pari a $n/2$. Ogni swap può essere ottenuto usando tre operatori C-NOT (controlled-NOT).

Quindi la QFT ha un tempo di esecuzione dell'ordine di $\Theta\left(n^2\right)$.

Il tempo di esecuzione della Fast Fourier Transform (FFT), (migliore algoritmo classico per l'esecuzione della trasformata di Fourier) richiede un tempo dell'ordine $\Theta\left(n2^n\right)$ per effettuare la trasformata di Fourier su un vettore di 2^n elementi, cioè un tempo esponenzialmente più lungo in confronto alla QFT.

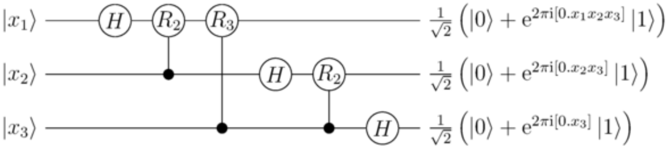
Quantum Fourier Transform

La rapresentazione grafica simbolica dell'operatore trasformata di Fourier quantistica è un pò più compatta come segue. Vediamo rappresentata rispettivamente a sinistra la QFT e a destra la QFT inversa



Quantum Fourier Transform

L'operatore R è centrale per il funzionamento del circuito QFT ed è quello che realizza lo sfasamento controllato.



L'operatore di sfasamento è definito da:

$$R_k \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$$