Algoritmo di Grover: Sintesi

Ingresso: n qubits nello stato iniziale $|0\rangle$; Query quantistica $\mathcal{O}$ che realizza l'operazione: $\mathcal{O}|x\rangle = (-1)^{f(x)}|x\rangle$, dove $f(x) = 0$ per tutti gli $0 \leq x < 2^n$ eccetto x_0 per cui $f(x_0) = 1$.

Uscita: x_0

Tempo esecuzione: $O(\sqrt{2^n})$ operazioni con probabilità di riuscita $O(1)$.

Procedimento:

1. $|0\rangle^{\otimes n}$ stato iniziale
2. $H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle = |\psi\rangle$ applica l'operatore di Hadamard a tutti i qubits.
3. $[(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)\mathcal{O}]^R|\psi\rangle \approx |x_0\rangle$ applica l'iterazione di Grover $R \approx \frac{\pi}{4}\sqrt{2^n}$ volte
4. x_0 misura il registro in uscita

Algoritmo di Grover:Applicazione

Consideriamo un sistema di $N = 8 = 2^3$ stati, in cui stiamo cercando lo stato x_0 che è rappresentato dal qubit 011. Per descrivere questo sistema sono necessari $n = 3$ qubits cioè:

$$|x\rangle = \alpha_0|000\rangle + \alpha_1|001\rangle + \alpha_2|010\rangle + \alpha_3|011\rangle + \alpha_4|100\rangle + \alpha_5|101\rangle + \alpha_6|110\rangle +$$

dove α_i è l'ampiezza dello stato $|i\rangle$.

L'algoritmo di Grover inizia con un sistema di stati inizializzati sullo 0:

$$1|000\rangle \quad (1)$$

Quindi applica l'operatore di Hadamard per ottenere uguali ampiezze associate a ciascuno stato, per questo esempio si ha

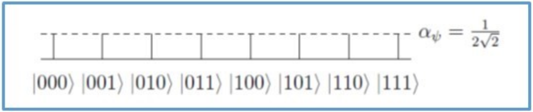
$$\alpha_i = 1/\sqrt{N} = 1/\sqrt{8} = 1/2\sqrt{2}$$

cioè in forma estesa:

$$H^3|000\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{x=0}^{7}|x\rangle = |\psi\rangle \quad (2)$$

Algoritmo di Grover

Una rappresentazione grafica delle ampiezze è utile per comprendere, come l'algoritmo lavora. Poichè le ampiezze restano reali durante l'esecuzione dell'algoritmo di Grover, esse possono essere visualizzate in un sistema di coordinate cartesiane come una sequenza di segmenti di lunghezza proporzionale alle ampiezze e perpendicolari ad uno degli assi amplitudes. La sovrapposizione degli stati di uguale ampiezza che risulta dalla prima applicazione dell'operatore di Hadamard si può visualizzare come segue:



(a)

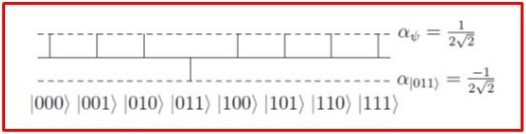
Algoritmo di Grover

Successivamente si applicano 2 iterazioni di Grover (poichè $\frac{\pi}{4}\sqrt{8} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} \approx 2.22$, si arrotonda a 2 iterazioni).

In ciascuna iterazione di Grover, il primo step è chiamare l'oracolo quantistico $\mathcal{O}$, il secondo step è eseguire l'inversione rispetto alla media (trasformazione di diffusione).

La query cambia segno all'ampiezza dello stato $|x_0\rangle$, in questo esempio, $|011\rangle$ dando come risultato la configurazione:

$$|x\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|010\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle + \ldots + \frac{1}{2\sqrt{2}}|111\rangle \tag{3}$$



(b)

Algoritmo di Grover

L'operatore di diffusione $2|\psi\rangle\langle\psi| - I$ viene applicato al vettore $|x\rangle$:

$$[2|\psi\rangle\langle\psi| - I]|x\rangle \tag{4}$$

osservando che:

$$|x\rangle = |\psi\rangle - \frac{2}{2\sqrt{2}}|011\rangle \tag{5}$$

l'equazione corrispondente all'operatore di diffusione si scrive:

$$\begin{aligned} &=[2|\psi\rangle\langle\psi| - I]\left[|\psi\rangle - \frac{2}{2\sqrt{2}}|011\rangle\right] \\ &=2|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle - |\psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{2}}|\psi\rangle\langle\psi|011\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

si noti che $\langle\psi|\psi\rangle = 8\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] = 1$. Inoltre, poichè $|011\rangle$ è un vettore della base si ha $\langle\psi|011\rangle = \langle 011|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$= 2|\psi\rangle - |\psi\rangle - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle \tag{7}$$

Algoritmo di Grover

$$= |\psi\rangle - \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle \tag{9}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{x=0}^{7}|x\rangle\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle \tag{10}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{\substack{x=0 \\ x\neq 3}}^{7}|x\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|011\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|011\rangle \tag{11}$$

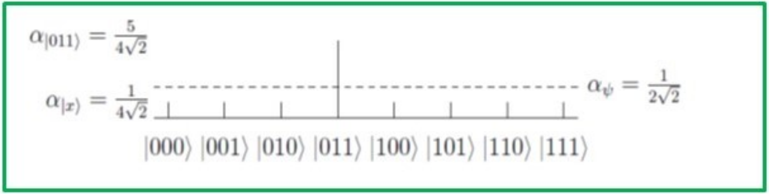
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{\substack{x=0 \\ x\neq 3}}^{7}|x\rangle + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle \tag{12}$$

Algoritmo di Grover

Il risultato precedente completa la prima iterazione di Grover e si scrive in notazione estesa nella forma:

$$|x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|010\rangle + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle + \ldots + \frac{1}{4\sqrt{2}}|111\rangle \tag{13}$$

e che si rappresenta graficamente:



(c)

Algoritmo di Grover

La seconda iterazione di Grover ripete le due trasformazioni:

$$
\begin{aligned}
|x\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|010\rangle - \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle + \ldots + \frac{1}{4\sqrt{2}}|111 \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{\substack{x=0 \\ x\neq 3}}^{7}|x\rangle - \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{x=0}^{7}|x\rangle - \frac{6}{4\sqrt{2}}|011\rangle \\
&= \frac{1}{2}|\psi\rangle - \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle
\end{aligned} \tag{14}
$$

Algoritmo di Grover

$$[2|\psi\rangle\langle\psi| - I]\left[\frac{1}{2}|\psi\rangle - \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle\right] \tag{15}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle - \frac{1}{2}|\psi\rangle - 2\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)|\psi\rangle\langle\psi|011\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle \tag{16}$$

$$= |\psi\rangle - \frac{1}{2}|\psi\rangle - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)|\psi\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle \tag{17}$$

$$= -\frac{1}{4}|\psi\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}}|011\rangle \tag{18}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{\substack{x=0\\x\neq 3}}^{7}|x\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|011\rangle\right| + \frac{3}{2\sqrt{2}}\left|\,011\right\rangle \tag{19}$$

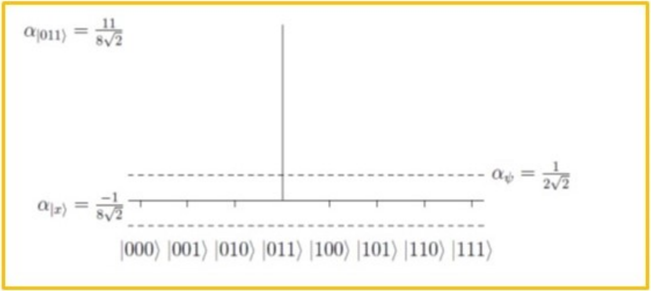
$$= -\frac{1}{8\sqrt{2}}\sum_{\substack{x=0\\x\neq 3}}^{7}|x\rangle + \frac{11}{8\sqrt{2}}|011\rangle \tag{20}$$

Algoritmo di Grover

Il risultato della seconda iterazione in forma estesa si scrive:

$$|x\rangle = -\frac{1}{8\sqrt{2}}|000\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}}|001\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}}|010\rangle + \frac{11}{8\sqrt{2}}|011\rangle - \ldots - \frac{1}{8\sqrt{2}}|111\rangle$$

$$\alpha_{|011\rangle} = \frac{11}{8\sqrt{2}} \tag{21}$$



(d)

Algoritmo di Grover

Ora, quando viene osservato il sistema, la probabilità che venga osservato lo stato corrispondente alla soluzione corretta $|011\rangle$, è

$$\left|\frac{11}{8\sqrt{2}}\right|^2 = 121/128 \approx 94.5\%$$

.

La probabilità di trovare uno stato errato è

$$\left|\frac{-\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}\right|^2 = 7/128 \approx 5.5\%$$

L'algoritmo di Grover ha una probabilità 17 volte maggiore di fornire la risposta corretta rispetto a una errata con una dimensione di input di $N = 8$. L'errore diminuisce quando la dimensione del vettore in input aumenta. Sebbene l'algoritmo di Grover sia probabilistico, l'errore diventa davvero trascurabile quando N cresce.