Porte logiche di Pauli

Un altro importante esempio è rappresentato dalle porte o operatori di Pauli X, Y, Z a singolo-qubit.

Gli operatori di Pauli X, Y, Z sono spesso indicati come σ_x, σ_y, e σ_z oppure σ_1, σ_2 and σ_3.

Questi operatori sono stati derivati dalle misure dello spin rispettivamente lungo gli assi x, y, and z.

Le porte di Pauli X, Y, Z corrispondono sulla sfera di Bloch alla rotazione di π radianti intorno agli assi x, y, z.

Porta logica X di Pauli

La porta logica X di Pauli scambia le ampiezze di $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

$$|0\rangle \; - \boxed{X} - \; |1\rangle$$

$$X|0\rangle = |1\rangle, \quad X|1\rangle = |0\rangle \tag{1}$$

$$X = \begin{pmatrix} \langle 0|X|0\rangle & \langle 0|X|1\rangle \\ \langle 1|X|0\rangle & \langle 1|X|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|1\rangle & \langle 0|0\rangle \\ \langle 1|1\rangle & \langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \tag{3}$$

Porta logica Y di Pauli

La porta logica Y di Pauli scambia le ampiezze di $|0\rangle$ e $|1\rangle$, moltiplica ciascun ampiezza per i e nega l'ampiezza di $|1\rangle$.

$$|0\rangle \; — \boxed{\mathrm{Y}} — \; i|1\rangle$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle \tag{4}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \langle 0|Y|0\rangle & \langle 0|Y|1\rangle \\ \langle 1|Y|0\rangle & \langle 1|Y|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\langle 0|1\rangle & -i\langle 0|0\rangle \\ i\langle 1|1\rangle & -i\langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| \tag{6}$$

Porta logica Z di Pauli

La porta logica Z di Pauli lascia invariata l'ampiezza di $|0\rangle$ e nega l'ampiezza di $|1\rangle$.

$$|1\rangle \; -\boxed{\mathsf{Z}}- \; -|1\rangle$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle \tag{7}$$

$$Z = \begin{pmatrix} \langle 0|Z|0\rangle & \langle 0|Z|1\rangle \\ \langle 1|Z|0\rangle & \langle 1|Z|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|0\rangle & -\langle 0|1\rangle \\ \langle 1|0\rangle & -\langle 1|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \tag{9}$$

Porte logiche di Pauli

Le operazioni effettuate dalle porte di Pauli sul generico qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ possono essere riassunte come segue:

$$\begin{aligned} X(a|0\rangle + b|1\rangle) &= a|1\rangle + b|0\rangle \\ Y(a|0\rangle + b|1\rangle) &= i(a|1\rangle - b|0\rangle) \\ Z(a|0\rangle + b|1\rangle) &= a|0\rangle - b|1\rangle \end{aligned} \tag{10}$$

- l'operatore X esegue il cosiddetto "bit flip"
- l'operatore Z esegue il cosiddetto "phase flip"
- l'operatore Y esegue simultaneamente "bit flip" e "phase flip".

Porte o Operatori di Sfasamento

La porta Z di Pauli modifica solo la fase del sistema. La porta Z di Pauli si ottiene come caso particolare di una porta più generale di cambiamento di fase R_θ per $\theta = \pi$. La porta "cambiamento di fase" R_θ si scrive:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + e^{i\theta}|0\rangle\langle 1| \tag{11}$$

Dalla porta R_θ ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ottiene la porta S:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + i|0\rangle\langle 1| \tag{12}$$

Porte o Operatori di Sfasamento T o $\frac{\pi}{8}$

La porta T si ottiene per $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = |1\rangle\langle 0| + e^{i\frac{\pi}{4}}|0\rangle\langle 1| \tag{13}$$

il nome $\frac{\pi}{8}$ deriva dal fatto che la porta T può anche essere scritta nella forma

$$T = e^{i\frac{\pi}{8}} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Porte o Operatori di Rotazione

Un singolo stato del qubit è un punto sulla superficie della sfera di Bloch. Qualunque trasformazione prodotta da un operatore unitario risulta in una rotazione sulla sfera:

$$U = e^{i\gamma} R_{\hat{n}}(\theta)$$

Questa relazione esprime una generica rotazione rispetto ad una direzione arbitraria $\hat{n}$ ed uno shift della fase γ.
Le porte di rotazione definiscono le rotazioni intorno alle porte di Pauli $P = \{X, Y, Z\}$. Sono definite in base alle relazioni generali

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)P$$

Porte o Operatori di Rotazione

Sulla base della relazione generale:

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)P$$

La rotazione intorno all'asse X è data da:

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Porte o Operatori di Rotazione

Sulla base della relazione generale:

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)P$$

La rotazione intorno all'asse Y è data da:

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{18}$$

Porte o Operatori di Rotazione

Sulla base della relazione generale:

$$R_P(\theta) = \exp(-i\theta P/2) = \cos(\theta/2)I - i\sin(\theta/2)P$$

La rotazione intorno all'asse Z è data da:

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Proprietà delle porte di Pauli

Le proprietà delle porte di Pauli si riassumono come segue:

$$X^2 = I, \quad Y^2 = I, \quad Z^2 = I \tag{21}$$

$$XY = jZ \quad YX = -jZ \quad YZ = jX \quad ZY = -jX \tag{22}$$

$$ZY = -jX \quad ZX = jY \quad XZ = -jY \tag{23}$$

Proprietà delle porte di Pauli

Le proprietà delle porte di Pauli si riassumono anche mediante la tavola di moltiplicazioni:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
\times & I & X & Y & Z \\
\hline
I & I & X & Y & Z \\
\hline
X & X & I & iZ & -iY \\
\hline
Y & Y & -iZ & I & iX \\
\hline
Z & Z & iY & -iX & I
\end{array}
\tag{24}
$$