Sfera di Bloch

Lo stato del qubit é rappresentato come combinazione lineare dei vettori della base:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

dove le quantità α e β sono dei numeri complessi. I moduli quadrati di α e β rappresentano le probabilitá quantistiche che un dato stato della base sia osservato (cioè in assenza di sovrapposizione).

$|\psi\rangle$ é un vettore unitario, cioé con norma $||\,|\psi\rangle\,|| = \langle\psi|\psi\rangle = 1$ quindi:

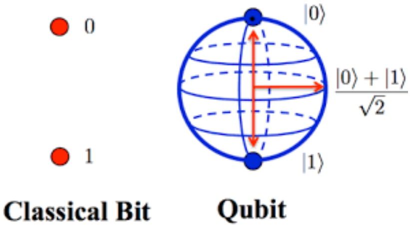
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$|0\rangle$ e $|1\rangle$ possono rappresentare due vettori qualsiasi che formano una base ortonormale in $\mathbb{C}^2$.

Sfera di Bloch

La base più comunemente utilizzata nel calcolo quantistico è detta *base computazionale*:

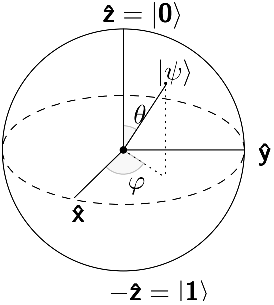
$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Sfera di Bloch

La sfera di Bloch è una rappresentazione geometrica degli stati dei qubit come punti sulla superficie di una sfera di raggio unitario.

Molte operazioni su singoli qubit comunemente utilizzate nell'elaborazione di informazioni quantistiche possono essere descritte in modo chiaro all'interno della sfera di Bloch.



Sfera di Bloch

La sfera di Bloch è una generalizzazione del "cerchio unitario".

Il cerchio unitario è comunemente usato per la rappresentazione di un numero complesso z con $|z|^2 = 1$ come punto sul cerchio unitario nel piano complesso.

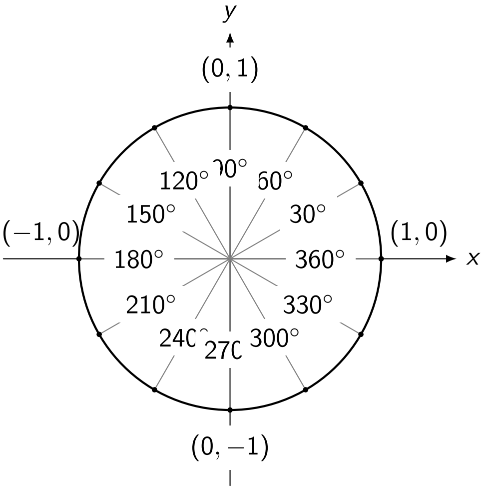
Se $z = x + iy$, dove x e y sono reali, allora:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z^* z \\ &= (x - iy)(x + iy) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned} \tag{1}$$

L'equazione $x^2 + y^2 = 1$ rappresenta una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1.

Sfera di Bloch

Per un qualunque numero complesso $z = x + iy$,
si può scrivere la parte reale $x = r\cos\theta$ e la parte immaginaria $y = r\sin\theta$, cioè $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.



Sfera di Bloch

Il numero complesso $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ si può scrivere usando la relazione di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

nella forma

$$z = re^{i\theta}$$

L'equazione del cerchio unitario $(r = 1)$ si scrive quindi:

$$z = e^{i\theta}$$

che è consistente con la condizione che il numero abbia norma unitaria $|z|^2 = 1$.

Sfera di Bloch

Consideriamo quindi il qubit

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{2}$$

con α e β numeri complessi che possono essere scritti in coordinate polari usando la rappresentazione di Eulero come:

$$\alpha = r_\alpha e^{i\phi_\alpha} \qquad \beta = r_\beta e^{i\phi_\beta} \tag{3}$$

Lo stato $|\psi\rangle$ può essere riscritto in coordinate polari:

$$|\psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha}|0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta}|1\rangle \tag{4}$$

in termini dei $r_\alpha, \phi_\alpha, r_\beta$ and ϕ_β

Sfera di Bloch

Moltiplicando la relazione precedente per un fattore di tipo $e^{i\gamma}$, le osservabili fisiche $|\alpha|^2$ and $|\beta|^2$ non si modificano, infatti si ha:

$$\left|e^{i\gamma}\alpha\right|^2 = \left(e^{i\gamma}\alpha\right)^* \left(e^{i\gamma}\alpha\right) = \left(e^{-i\gamma}\alpha^*\right)\left(e^{i\gamma}\alpha\right) = \alpha^*\alpha = |\alpha|^2 \tag{5}$$

$$\left|e^{i\gamma}\beta\right|^2 = \left(e^{i\gamma}\beta\right)^* \left(e^{i\gamma}\beta\right) = \left(e^{-i\gamma}\beta^*\right)\left(e^{i\gamma}\beta\right) = \beta^*\beta = |\beta|^2 \tag{6}$$

Sulla base di questa osservazione possiamo moltiplicare il qubit $|\psi\rangle$ per il fattore $e^{-i\phi_\alpha}$ ottenendo:

$$|\psi'\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i(\phi_\beta-\phi_\alpha)}|1\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i\phi}|1\rangle \tag{7}$$

che quindi è espressa in funzione di tre parametri reali, r_α, r_β, and $\phi = \phi_\beta - \phi_\alpha$

Sfera di Bloch

La funzione $|\psi'\rangle$ soddisfa ancora la condizione di normalizzazione $\langle\psi'|\psi'\rangle = 1$.
Scriviamo adesso $|\psi'\rangle$ nella rappresentazione cartesiana $|1\rangle$

$$|\psi'\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i\phi}|1\rangle = r_\alpha|0\rangle + (x+iy)|1\rangle \tag{8}$$

and the normalization constraint is:

$$\begin{aligned} |r_\alpha|^2 + |x+iy|^2 &= r_\alpha^2 + (x+iy)^*(x+iy) \\ &= r_\alpha^2 + (x-iy)(x+iy) \\ &= r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \tag{9}$$

che è l'equazione della sfera unitaria nello spazio 3D con coordinate cartesiane (x, y, r_α)

Sfera di Bloch

In un sistema di coordinate polari le coordiante cartesiane si scrivono:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{10}$$

quindi sostituendo r_α a z, e ricordando che $r = 1$ si ha:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= z|0\rangle + (x+iy)|1\rangle \\ &= \cos\theta|0\rangle + \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi)|1\rangle \\ &= \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

Quindi abbiamo solo due paramentri che definiscono lo stato sulla sfera unitaria.

Sfera di Bloch

Riscriviamo il qubit in forma completa:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle\right) \tag{12}$$

dove θ, ϕ e γ sono numeri reali.

I numeri $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ definiscono un punto su una sfera tridimensionale unitaria.

Gli stati dei qubit con valori arbitrari di γ sono tutti rappresentati dallo stesso punto sulla sfera Bloch perché il fattore $e^{i\gamma}$ non ha effetti osservabili che quindi si può omettere:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle \tag{13}$$

Sfera di Bloch

La relazione che definisce la rappresentazione del qubit sulla sfera di Bloch richiede un ultima osservazione. Si noti infatti che la relazione ottenuta:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle \tag{14}$$

$\theta' = 0 \Rightarrow |\psi\rangle = |0\rangle$ e $\theta' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\psi\rangle = e^{i\phi}|1\rangle$ che suggerisce che $0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ può generare tutti i punti della sfera di Bloch.

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \tag{15}$$

Questa è la relazione che rappresenta il generico qubit sulla sfera di Bloch.

Sfera di Bloch

In conclusione, utilizzando le relazioni $\alpha = \cos(\theta/2)$ e $\beta = e^{i\phi}\sin(\theta/2)$ possiamo riscrivere la $|\psi\rangle$ nelle forme equivalenti:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\
|\psi\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \\
|\psi\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + (\cos\phi + i\sin\phi)\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Sfera di Bloch

Tutte le possibili combinazioni lineari di $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ nel dominio $\mathbb{C}^2$ corrispondono a tutti i punti (θ, ψ) sulla superficie di una sfera di raggio 1. In particolare si ha:

$$\alpha = \cos(\theta/2) \qquad \beta = e^{i\phi}\sin(\theta/2)$$