Notazione di Dirac

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Per poter approfondire i metodi formali utilizzati per scrivere gli algoritmi quantistici, è importante acquisire un pò di familiarità con le notazioni e gli operatori comunemente usate per descrivere i sistemi in meccanica quantistica in generale e quindi gli stati che costituiscono i qubit e i registri quantistici. Un generico vettore in questo spazio puó essere scritto nella forma:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{1}$$

La notazione più utilizzata è nota con il nome di Bra-Ket o notazione di Dirac, dal nome dello scienziato Paul Dirac che l'aveva introdotta a suo tempo. Tale notazione permette di descrivere i vettori in modo più compatto e facilmente trattabile dal punto di vista computazionale:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Notazione di Dirac

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Consideriamo quindi un generico vettore scritto utilizzando la notazione di Dirac:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = |\mathbf{v}\rangle \tag{3}$$

Il vettore colonna $|\mathbf{v}\rangle$ viene indicato come "ket-v".

Il vettore duale di $|\mathbf{v}\rangle$ è chiamato "bra-v" e si scrive usando la notazione di Dirac:

$$\langle \mathbf{v}| = \overline{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \overline{v_0} & \overline{v_1} & \dots & \overline{v_n} \end{bmatrix} \tag{4}$$

dove $\bar{v}$ è il complesso coniugato di v (il complesso coniugato di v si scrive anche v^*).

Notazione di Dirac

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

La notazione di Dirac è un modo conveniente per descrivere i vettori nello spazio di Hilbert H, che è lo spazio vettoriale utilizzato per il calcolo quantistico.

Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale con un prodotto interno e una norma definita da quel prodotto interno e varie altre operazioni che richiamiamo nelle sezioni seguenti.

Prodotto Interno

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Il prodotto interno di uno spazio vettoriale è un'operazione che assegna un valore scalare a ciascuna coppia di vettori **u** e **v** nello spazio vettoriale.

Il prodotto interno di due vettori in uno spazio di Hilbert è indicato utilizzando la notazione di Dirac con $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$.

Il prodotto interno $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ quindi si calcola come prodotto dei vettori **v** e $\overline{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}$ (che è il vettore di duale di **u** o trasposto coniugato di **u**):

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{\mathbf{u}^{\mathrm{T}}} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \overline{u_0} & \overline{u_1} & \dots & \overline{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \overline{u_0} \cdot v_0 + \overline{u_1} \cdot v_1 + \dots + \overline{u_n} \cdot v_n \tag{5}$$

Proprietà del Prodotto Interno

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Il prodotto interno $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ ha le seguenti proprietà:

1. $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \geq 0$, con $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $|\mathbf{v}\rangle = 0$
2. $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle}$ per tutti i vettori $|\mathbf{u}\rangle$ e $|\mathbf{v}\rangle$ nello spazio vettoriale.
3. $\langle \mathbf{u} | \alpha_0 \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{w} \rangle = \alpha_0 \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \alpha_1 \langle \mathbf{u} | w \rangle$

3.1 Più in generale, il prodotto interno di $|\mathbf{u}\rangle$ e $\sum_i \alpha_i \, |\mathbf{v}_i\rangle$ è uguale a $\sum_i \alpha_i \, \langle \mathbf{u} | \mathbf{v}_i \rangle$ per tutti gli scalari α_i e i vettori $|\mathbf{u}\rangle$ e $|\mathbf{v}\rangle$ nello spazio vettoriale.

Norma

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

La norma di un vettore $|\mathbf{v}\rangle$ in uno spazio di Hilbert è definita usando la radice quadrata del prodotto interno di $|\mathbf{v}\rangle$ con se stessa:

$$\| \, |\mathbf{v}\rangle \, \| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle} \tag{6}$$

Questa norma è anche conosciuta come ℓ^2-norm, 2-norma o norma euclidea sui numeri complessi.

Geometricamente, questa norma corrisponde alla distanza dall'origine al punto $\mathbf{v}$ secondo il teorema di Pitagora.

Prodotto Esterno

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Il prodotto esterno, indicato con $|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{u}|$ o $|\mathbf{v}\rangle \otimes \langle\mathbf{u}|$ è il tensore o prodotto di Kronecker $|\mathbf{v}\rangle$ con la trasposta coniugata di $|\mathbf{u}\rangle$.

Il risultato è una matrice:

$$|\mathrm{v}\rangle\langle\mathbf{u}| = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u_0} & \overline{u_1} & \dots & \overline{u_m} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} v_0\overline{u_0} & v_0\overline{u_1} & \dots & v_0\overline{u_m} \\ v_1\overline{u_0} & v_1\overline{u_1} & \dots & v_1\overline{u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n\overline{u_0} & v_n\overline{u_1} & \dots & v_n\overline{u_m} \end{bmatrix}$$

Prodotto Esterno

Spazio vettoriale complesso delle funzioni

Il prodotto esterno viene utilizzato per descrivere una trasformazione lineare tra spazi vettoriali.

Invece di usare pesanti matrici di trasformazione come quella descritta nella slide precedente, una trasformazione lineare da uno spazio di Hilbert H ad un altro spazio di Hilbert H' di un vettore $|\mathbf{w}\rangle$ in H può essere convenientemente scritto:

$$(|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{u}|)|\mathbf{w}\rangle = |\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle|\mathbf{v}\rangle \tag{7}$$

poichè $\langle\mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle$ è una quantità scalare commutativa.

Prodotto Tensore

Spazio vettoriale complesso delle funzioni

Il prodotto tensore o prodotto tensoriale, un modo di combinare spazi vettoriali in spazi vettoriali più grandi, è un'operazione molto importante nel calcolo quantistico.

Il prodotto tensore tra due vettori $|\mathbf{u}\rangle \otimes |\mathbf{v}\rangle$ è così comune che di solito viene semplificato in $|\mathbf{u}\rangle|\mathbf{v}\rangle$ o $|\mathbf{uv}\rangle$.

Il prodotto tensoriale di un vettore con se stesso, eseguito n volte, è indicato con $|\mathbf{v}\rangle^{\otimes n}$.

Prodotto Tensore

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Due vettori colonna $|\mathbf{u}\rangle$ e $|\mathbf{v}\rangle$ di lunghezze m e n producono un vettore tensore colonna di lunghezza $m \cdot n$:

$$|\mathbf{u}\rangle|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{uv}\rangle = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \cdot v_0 \\ u_0 \cdot v_1 \\ \vdots \\ u_0 \cdot v_n \\ u_1 \cdot v_0 \\ \vdots \\ u_{m-1} \cdot v_n \\ u_m \cdot v_0 \\ \vdots \\ u_m \cdot v_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

Prodotto Tensore

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

I prodotti tensoriali sono importanti perché descrivono l'interazione tra due sistemi quantistici.

Lo spazio vettoriale che descrive un sistema quantistico moltiplicato tensorialmente con lo spazio vettoriale che descrive un altro sistema quantistico è lo spazio vettoriale costituito da combinazioni lineari di tutti i vettori nei due spazi vettoriali.

Le applicazioni del prodotto tensoriale al calcolo quantistico saranno richiamate e applicate più approfonditamente in relazione alle operazioni esiguite dai registri quantistici: cioè i sistemi quantistici costituiti da costituenti più piccoli di qubit combinati.

Prodotto Tensore

ESERCIZIO

Calcolare il prodotto tensoriale dei tre vettori $u = |1\rangle$, $v = |0\rangle$ e $w = |1\rangle$.

Soluzione:

Scrivo l'espressione del prodotto tensoriale:

$$|101\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Prodotto Tensore

ESERCIZIO

Poi moltiplico tensorialmente i primi due, il risultato lo moltiplico tensorialmente per il terzo

$$|101\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{T}$$

Prodotto Tensore

ESERCIZIO

Calcolare il prodotto tensoriale dei due vettori:

$$u = |1\rangle \tag{11}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{12}$$

Soluzione:

$$u \otimes v = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \tag{13}$$

Prodotto Tensore

ESERCIZIO

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \tag{15}$$

$$u \otimes v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \tag{16}$$

$$u \otimes v = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |11\rangle) \tag{17}$$