Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Bit quantistico (Qubit)

Nell'ambito dell'informazione quantistica l'unitá fondamentale é il bit quantistico o qubit.

Il qubit é un vettore in uno spazio vettoriale complesso (dotato di tutte le proprietá di uno spazio vettoriale quindi di prodotto interno, prodotto esterno etc).

In analogia con il bit classico, possiamo indicare con $|0\rangle$ e $|1\rangle$ i due stati fondamentali del qubit.

I due stati sono scelti in modo da costituire una base ortonormale dello spazio vettoriale.

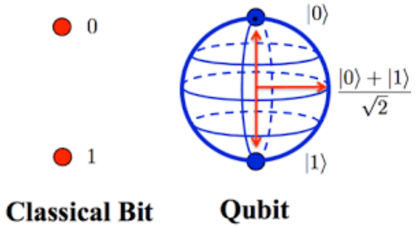
La sovrapposizione degli stati è possibile mediante combinazione lineare dei vettori della base.

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Un generico qubit puó essere scritto nella forma:

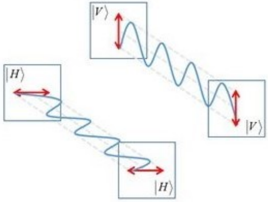
$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{1}$$

con $a, b \in \mathbf{C}$.
Si possono eseguire misure che proiettano $|\psi\rangle$ sulla base $|0\rangle, |1\rangle$.
Il risultato di questa operazione non é deterministico.
La probabilitá di ottenere il risultato $|0\rangle$ é $|a|^2$.
La probabilitá di ottenere il risultato $|1\rangle$ é $|b|^2$.



Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Esempio Gli stati di polarizzazione (orizzontale e verticale) di un fotone sono un altro esempio di base per uno spazio vettoriale complesso adatto alla computazione quantistica.



Un generico qubit puó essere scritto nella forma:

$$|\psi\rangle = a|H\rangle + b|V\rangle \quad (2)$$

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Abbiamo visto nelle diapositive precedenti l'*equazione di Klein-Gordon* e l'*equazione di Schroedinger*, cioè le equazioni differenziali le cui soluzioni forniscono le funzioni d'onda ψ.

Abbiamo anche avuto modo di commentare che sono state proposte altre equazioni differenziali lineari per descrivere gli stati delle particelle presenti in natura nell'ambito della meccanica quantistica in condizioni più generali di quanto visto per l'equazione di Klein-Gordon e l'equazione di Schroedinger.

Sulla base delle nostre conoscenze acquisite in corsi precedenti, possiamo inoltre affermare che l'insieme di tutte le soluzioni di una qualsiasi equazione differenziale lineare, questo insieme è uno spazio vettoriale complesso.

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

L'insieme di tutte le soluzioni fisicamente accettabili di queste equazioni (per esempio le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon) formano sempre uno spazio vettoriale complesso.

Quindi sulla base delle considerazioni precedenti si può concludere che per descrivere un determinato fenomeno/stato di una particella si può introdurre uno spazio vettoriale complesso e associare a ogni possibile stato del moto della particella un vettore in questo spazio vettoriale.

Il fatto che le funzioni d'onda (per esempio le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon) costituiscano uno spazio vettoriale complesso offre diverse opportunità dal punto vista computazionale. La struttura apparentemente astratta della teoria degli spazi vettoriali porta a imprevedibili semplificazioni nella soluzione di problemi computazionali.

La formulazione matriciale della meccanica quantistica proposta da Heisenberg (1925) è basata proprio sulle proprietà vettoriali dello spazio complesso delle funzioni d'onda.

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Consideriamo l'insieme di tutte le funzioni d'onda ψ che non sono identicamente nulle e che rappresentano tutti i possibili stati di una particella di massa m.

Per costruire lo spazio vettoriale complesso associato a questo insieme di funzioni d'onda é necessario aggiungere la funzione d'onda identicamente nulla in tutti i punti dello spazio e a tutti gli istanti di tempo.

Indichiamo lo spazio vettoriale complesso ottenuto con H.

Somma

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Richiamiamo brevemente i postulati in base ai quali viene definito uno *spazio vettoriale complesso* H, cioè un insieme di elementi (vettori/funzioni d'onda), tale che:

- per ogni coppia vettori/funzioni d'onda ψ_1 e ψ_2 appartenenti a H esiste un unico vettore ψ somma di ψ_1 e ψ_2, e indicato con

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

- se ψ_1 e ψ_2 sono due vettori/funzioni d'onda appartenenti all'insieme H, allora l'operatore somma sum $(\psi_1 + \psi_2)$ appartiene anche a H

- se ψ appartiene ad H e se c é un qualunque numero complesso, allora la funzione $c\psi$ appartiene a H.

Principio di sovrapposizione

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Il principio di sovrapposizione di due funzioni d'onda stabilisce in particolare che se ψ_1 e ψ_2 sono due funzioni d'onda e se c_1 e c_2 sono due qualunque numeri complessi allora la funzione ψ:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 \tag{3}$$

é anch'essa una funzione d'onda a condizione che non sia identicamente nulla.

Proprietà della somma

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

L'operazione somma di due vettori gode delle seguenti proprietà:

(a) $\psi_1 + \psi_2 = \psi_2 + \psi_1$ per qualunque ψ_1, ψ_2 appartenenti a H (*Proprietà commutativa della somma*)

(b) $\psi_1 + (\psi_2 + \psi_3) = (\psi_1 + \psi_2) + \psi_3$, per tre qualsivoglia funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 appartenenti a H (*Proprietà associativa della somma*)

(c) Esiste un unico vettore 0 in H, chiamato vettore nullo, tale che $\psi + \mathbf{0} = \psi$ per ogni ψ in H (*Esistenza e unicità del vettore nullo*)

Proprietà del prodotto per uno scalare

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Dato qualsiasi vettore ψ in H e qualsiasi numero complesso c esiste un unico vettore in H, indicato con $c\psi$, chiamato prodotto del vettore ψ per lo scalare c.

L'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare (numero complesso) soddisfa le condizioni:

(a) $(c_1 c_2)\,\psi = c_1\,(c_2\psi)$ per qualsiasi vettore ψ, e due scalari c_1 e c_2
Proprietà associativa del prodotto per uno scalare

(b) $(c_1 + c_2)\,\psi = c_1\psi + c_2\psi$ per qualsiasi vettore ψ e coppia di scalari c_1 e c_2 *Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare*

(c) $c\,(\psi_1 + \psi_2) = c\psi_1 + c\psi_2$ per due vettori ψ_1 e ψ_2 e qualsivoglia scalare c *Proprietà distributiva del prodotto per uno scalare*

(d) in particolare per lo scalare 1 abbiamo $1\,\psi = \psi$

Proprietà del prodotto per uno scalare

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Questi sono i postulati che definiscono uno spazio vettoriale lineare astratto nel dominio dei numeri complessi, che indica cioè che gli scalari per i quali possono essere moltiplicati i vettori sono i numeri complessi.

Se gli scalari appartengono all'insieme dei numeri reali, parliamo di spazio vettoriale lineare nel dominio dei numeri reali.

Indichiamo quindi semplicemente i due insiemi rispettivamente come "spazio vettoriale complesso" e "spazio vettoriale reale".

Un esempio di spazio vettoriale reale è lo "spazio fisico" euclideo tridimensionale.

Proprietà del prodotto per uno scalare

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Dalle proprietà richiamate nelle slides precedenti deriva infine che:

$$0\psi = 0 \tag{4}$$

$$(-1)\psi + \psi = 0 \tag{5}$$

$$(-c)\psi = -(c\psi) \tag{6}$$

Dipendenza/Indipendenza lineare

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

L'insieme di tutte le funzioni d'onda fisicamente significative con l'aggiunta della funzione identicamente nulla é uno spazio vettoriale complesso H, i cui vettori sono funzioni complesse dello spazio e del tempo.

L'insieme di N vettori $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ in uno spazio vettoriale complesso H sono detti linearmente indipendenti se l'equazione:

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \psi_n = 0 \tag{7}$$

implica che $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$.
Altrimenti i vettori sono detti lineramente dipendenti.

Dimensione

Spazio vettoriale complesso delle funzioni d'onda

Uno spazio vettoriale è caratterizzato da una dimensione che può essere finita o infinita.

Uno spazio vettoriale é detto a dimensionalitá finita N se é possibile trovare un insieme di N vettori linearmente indipendenti all'interno dello spazio, ma impossibile trovare un insieme contenente piú di N vettori lineramente indipendenti.

Lo spazio vettoriale é detto a dimensionalitá infinita ∞ se é possibile trovare un insieme di N vettori linearmente indipendenti nello spazio per ogni intero N arbitrariamente grande.

Lo spazio vettoriale H di tutte le soluzioni fisicamente significative delle funzioni d'onda di de Broglie è un insieme a dimensionalità infinita; cioè è costituito da un numero infinito di funzioni d'onda linearmente indipendenti.