Principio di indeterminazione

La meccanica classica presuppone che valori istantanei esatti possano essere assegnati a tutte le quantità fisiche, la meccanica quantistica invece non ammette questa possibilità.

Il primo esempio di questa limitazione riguarda la posizione e la quantità di moto di una particella, secondo cui, quanto più precisamente è nota la posizione di una particella, tanto meno precisamente si conosce la sua quantità di moto (e viceversa).

Adotteremo un approccio e una formulazione semplicistica e preliminare del principio di indeterminazione in meccanica quantistica.

E' necessario peró evidenziare che tale principio ha un ruolo e implicazioni molto più ampie e radici molto più profonde nella meccanica quantistica di quanto noi discuteremo nelle prossime slides.

Principio di indeterminazione

Abbiamo visto che l'Equazione di Klein- Gordon descrive l'equazione nel tempo della funzione d'anda della particella. In particolare data la condizione iniziale $\psi(\mathbf{r}, 0)$ all'istante $t = 0$, l'equazione di Klein-Gordon permette di ottenere la funzione d'onda al generico istante $\psi(\mathbf{r}, t)$.
Una singola onda piana non puó rappresentare una particella. Infatti tale onda é caratterizzata da una ampiezza A costante, indipendente da r e da t e pertanto la probabilitá di trovare la particella in una qualunque porzione dello spazio sarebbe zero.

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{p}) A(\mathbf{p}) \exp i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \tag{1}$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{(\infty)} d^3(\mathbf{p}) A(\mathbf{p}) \exp i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - \omega t) \tag{2}$$

Principio di indeterminazione

Nota quindi la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ ad un dato istante t cosa possiamo dire della posizione e del momento della particella? L'ampiezza dell'onda e più precisamente il suo modulo quadro $|A|^2$ puó aiutarci a rispondere. Se la funzione d'onda é tale che la sua ampiezza é zero tranne che in una regione molto ristretta possiamo dire che la posizione della particella é nota con grande accuratezza. Al contrario se la funzione d'onda é molto distribuita, cio'la sua ampiezza é approssimativamente costante su una regione di spazio estesa, ne deriva che la posizione è nota con grande incertezza. In generale quindi la descrizione ondulatoria della particella e della sua evoluzione ha come diretta conseguenza la circostanza che non possa essere attribuita una posizione precisa ad un dato istante di tempo.

Principio di indeterminazione

Analoghe considerazioni valgono per la variabile momento **p**. Il momento é legato alla lunghezza d'onda della particella.
La lunghezza d'onda é definita esattamente solo nel caso di funzioni armoniche perfettamente periodiche.
Funzioni d'onda conn una struttura più complessa di una semplice funzione sinusoidale o cosinusoidale non sono caratterizzate da una lunghezza d'onda definita esattamente.

Principio di indeterminazione

La posizione **r** e il momento **p** presi individualmente sono definiti esattamente rispettivamente solo nel caso di funzioni d'onda perfettamente localizzate (al limite delta di Dirac) o funzioni armoniche perfettamente periodiche.
Questa osservazione ci permette quindi di arrivare a concludere che la struttura ondulatoria della particella impedisce intrinsecamente la possibilità di definire contemporaneamente con la massima accuratezza posizione e momento.
Queste osservazioni costituiscono il punto di partenza per studiare il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Principio di indeterminazione

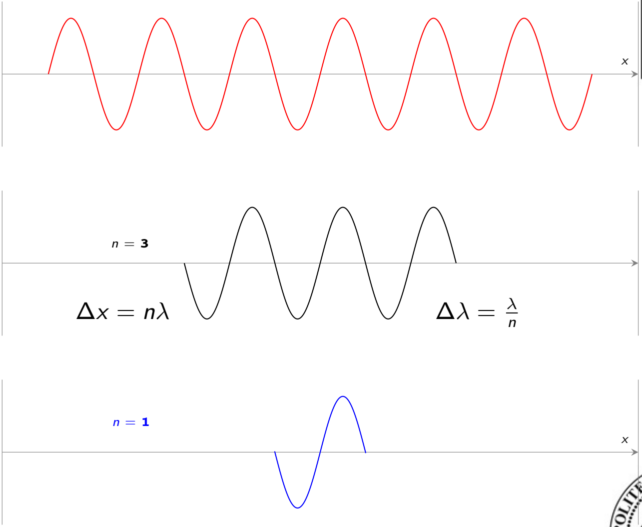

Figure: Rappresentazione semplificistica della derivazione della relazione di inderminazione per posizione Δx e momento $\Delta \mathbf{p}$ della particella

Principio di indeterminazione

Consideriamo per semplicitá il caso unidimensionale. Indichiamo con Δx l'indeterminazione nella posizione. Δx puó essere stimata sulla base della lunghezza del pacchetto d'onda. Se per semplicitá consideriamo un treno di lunghezza d'onda costante λ si ha:

$$\Delta x \sim n\lambda \tag{3}$$

Analogamente l'incertezza sulla lunghezza d'onda é inversamente proporzionale al numero di oscillazioni n, cioé:

$$\Delta\lambda \sim \frac{\lambda}{n} \tag{4}$$

Principio di indeterminazione

Poiché vale la relazione

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

utilizzando le relazioni della slide precedente si ha:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{n} \tag{5}$$

combinando le relazioni si arriva alla relazione:

$$\Delta x \Delta p \sim h \tag{6}$$

che si trova anche scritta (ponendo h=1):

$$\Delta x \Delta p \sim 1 \tag{7}$$

Una rappresentazione semplificata della necessitá di avere una disuguaglianza invece che una semplice equivalenza é mostrata nella slide successiva.

Principio di indeterminazione

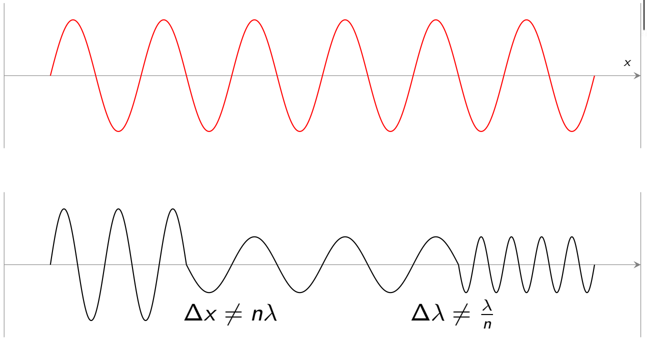

Figure: Rappresentazione semplicistica della necessitá di avere una disuguaglianza $\Delta x \Delta \mathbf{p} \geq 1$ invece che una uguaglianza $\Delta x \Delta \mathbf{p} \sim 1$ nella relazione di inderminazione

Principio di indeterminazione

La relazione di indeterminazione ricavata in maniera qualitativa nella pagina precedente rappresenta un minimo della stima dell'indeterminazione.
La ragione é perché la stima é stata eseguita considerando una funzione d'onda di valore costante.
In generale (per forme d'onda qualunque) si ha la disuguaglianza:

$$\Delta x \Delta p \geq h \tag{8}$$

o ponendo h=1:

$$\Delta x \Delta p \geq 1 \tag{9}$$

Principio di indeterminazione

Se consideriamo il caso tridimensionale, abbiamo 3 componenti del vettore posizione (x,y,z) e 3 componenti del vettore momento p_x, p_y, p_z. A ciascuna coppia corrisponderà una relazione di indeterminazione:

$$\Delta x \Delta p_x \geq 1, \tag{10}$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq 1, \tag{11}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq 1, \tag{12}$$

Principio di indeterminazione

Se consideriamo le 3 componenti del vettore posizione (x,y,z) e 3 componenti del vettore momento p_x, p_y, p_z, le coppie incrociate nelle tre direzioni non sono regolate dal principio di indeterminazione, cioé le diverse grandezze possono essere misurate con precisione illimitata:

$$\Delta r_\alpha \Delta p_\beta \geqq 0, \qquad \text{for } \alpha \neq \beta \tag{13}$$

Principio di indeterminazione

Si puó ricavare la relazione di indeterminazione nel dominio tempo -frequenza in modo analogo a quanto fatto per il dominio spazio, momento

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega) e^{-i\omega t} \tag{14}$$

$$g(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \tag{15}$$

$$\Delta\omega \Delta t \geq 1 \tag{16}$$