Dualismo Onda Particella

Nei primi decenni del '900 è stato dimostrato sperimentalmente che particelle come elettroni, protoni, neutroni, presentano caratteristiche ondulatorie, sebbene per molto tempo fossero state considerate unicamente come dei corpuscoli (cioé come semplici particelle classiche).

Al contrario per quanto riguarda i fotoni, la loro natura ondulatoria (onde luminose) é stata scoperta prima della natura corpuscolare.

Per questa ragione si tende quindi a immaginare la luce come un'entità ondulatoria e gli elettroni, protoni ed altre particelle subatomiche come semplici corpuscoli.

Dualismo Onda Particella

Consideriamo quindi una particella in moto uniforme, in assenza di forze esterne. Siano E l'energia, $\mathbf{p}$ la quantitá di moto ed m la massa della particella.

Se esiste un'onda associata con la particella in moto, si puó assumere che tale onda si muova nella stessa direzione della particella. Scriviamo l'onda nella forma giá nota cioé come combinazione di seni e coseni:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \exp i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \omega t) \tag{1}$$

con A ampiezza dell'onda, $\mathbf{r}$ é il vettore posizione, $\mathbf{k}$ il vettore d'onda e ω la frequenza.

Dualismo Onda Particella

Per dimostrare il fatto che l'onda e la particella rappresentino un'unica entitá é necessario ricavare la relazione tra le grandezze caratteristiche dell'onda $\mathbf{k}$ e ω e quelle caratteristiche della particella $\mathbf{p}$, E e m .
L'equazione (1) rappresenta un'onda piana, cioé caratterizzata da fronti d'onda piani su cui la fase é costante:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} - \omega t = costante \tag{2}$$

L'onda é caratterizzata da velocitá di fase:

$$\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} \tag{3}$$

Dualismo Onda Particella

Le *onde armoniche*, per definizione, non hanno né inizio né fine, cioè hanno lunghezza e durata infinita. Tutte le sorgenti in generale emettono onde attraverso processi che hanno una durata Δt finita e quindi nella realtá un fenomeno ondulatorio, anche se ha un andamento praticamente armonico, ha sempre una durata e un'estensione spaziale finite. Definiamo come *pacchetto d' onde* o *impulso* un'onda di durata e lunghezza finite. Il fenomeno fisico ondulatorio é legato al pacchetto stesso ed é con la velocità del pacchetto che.si propaga ad esempio l'energia dell'onda. Tale velocità è detta velocità di gruppo (si intende del gruppo d' onde che formano il pacchetto); la velocità delle singole componenti é la velocità di fase. La velocità del pacchetto é diversa da quella delle componenti. Si definisce velocitá di gruppo:

$$\frac{1}{v} = \frac{dk}{d\omega} \quad \text{or} \quad v = \frac{d\omega}{dv}\frac{dv}{dk} \tag{4}$$

Dualismo Onda Particella

Facciamo l'ipotesi che valga la relazione trovata in ottica per i fotoni $E = \hbar\omega$ anche per le particelle nella materia, si ha pertanto:

$$\hbar\omega = E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{5}$$

inserendo questa relazione nell'espressione della velocitá di gruppo si ottiene:

$$\frac{dk}{dv} = \frac{1}{v}\frac{d\omega}{dv} = \left(\frac{m}{\hbar}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \tag{6}$$

Dualismo Onda Particella

Integrando quindi questa relazione, assumendo che $k = 0$ per $v = 0$ si ha:

$$\hbar k = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = p \tag{7}$$

o in forma vettoriale:

$$\hbar \mathbf{k} = \mathbf{p} \tag{8}$$

l'equazione precedente é stata proposta da De Broglie.

Dualismo Onda Particella

Il vettore d'onda **k** é legato al momento p della particella dalla relazione $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, pertanto la lunghezza d'onda λ é definita come:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \tag{9}$$

che dipende dai parametri della particella in moto come risulta da:

$$\lambda = \left(\frac{h}{mc}\right) \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{(v/c)} \tag{10}$$

che indica che λ decresce quando la velocitá v aumenta. Per una velocitá costante **v** the wavelength λ is inversely proportional to the mass m.

Dualismo Onda Particella

Se E indica l'energia totale della particella, si puó scrivere:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - m^2c^4}} = \frac{(hc/E)}{\sqrt{1 - (mc^2/E)^2}} \tag{11}$$

che mostra che per m fissata la lunghezza d'onda λ decresce quando E aumenta. Per un valore costante di energia E la lunghezza d'onda λ aumenta con la massa m. Una particella priva di massa m ha la minima lunghezza d'onda che é quindi data da:

$$\lambda = \frac{hc}{E} \tag{12}$$

Equazione di Klein-Gordon

Discutiamo adesso un'equazione differenziale, nota come equazione di Klein-Gordon, che permette di descrivere la propagazione delle onde associate alle particelle elementari nello spazio vuoto. L'ipotesi più importante è che l'equazione delle onde che descrive una singola particella, di massa m, sia un'equazione differenziale lineare. Ciò implica che le soluzioni dell'equazione soddisfano il principio di sovrapposizione e quindi che qualsiasi combinazione lineare di due soluzioni dell'equazione é ancora una soluzione dell'equazione. Inoltre supponiamo che ogni soluzione dell'equazione che soddisfi determinate condizioni rappresenti una possibile situazione fisica, almeno in linea di principio. Le implicazioni fisiche di questi presupposti sono di vasta portata. Le ampiezze delle onde delle particelle della materia possono essere sommate proprio come le ampiezze delle onde elettromagnetiche che obbediscono alle equazioni di Maxwell che sono anch'esse equazioni differenziali lineari.

Equazione di Klein-Gordon

Consideriamo la generica onda piana:

$$\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) = \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} - i\omega t) \tag{13}$$

Derivando l'equazione (13) due volte rispetto al tempo si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) = -\omega^2\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) \tag{14}$$

Derivando l'equazione (13) due volte rispetto allo spazio si ha per la componente x:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) = -p_x^2\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) \tag{15}$$

Equazione di Klein-Gordon

Combinando le derivate seconde, si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) - \nabla^2\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) = -m^2\psi(\mathbf{r}, t; \mathbf{p}) \tag{16}$$

dove:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{17}$$

e:

$$\omega^2 - p^2 = m^2 \tag{18}$$

L'equazione differenziale ottenuta é nota come equazione di Klein-Gordon.