Lezioni di Calcolo Numerico
Lezione 09: Sistemi lineari

Alberto Tibaldi

18 maggio 2018

Indice

6 La fattorizzazione QR

Fino a questo momento ci siamo concentrati sulla soluzione di sistemi lineari aventi matrici $\underline{\underline{A}}$ quadrate e a determinante non nullo. A questo scopo abbiamo introdotto due fattorizzazioni: la PA = LU e la fattorizzazione di Choleski, avendo sempre in mente il fatto che i sistemi associati hanno soluzione esistente e unica. Da adesso, cambieremo un po' obiettivo: invece di concentrarci su matrici necessariamente quadrate, considereremo la possibilità di dover trattare matrici rettangolari $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,n}$, ovvero aventi m righe e n colonne. Ci preoccuperemo prevalentemente del caso $m > n$, ossia matrici con più righe che colonne.

La prima tecnica in grado di fattorizzare una matrice rettangolare che studieremo ha, come proprietà, quella di generare, tra i fattori, una matrice ortogonale. Poiché potrebbe essere opportuno studiare più in dettaglio le matrici ortogonali, Appendice A riporta un po' di spiegazioni e interpretazioni legate a esse.

6.1 Introduzione alla fattorizzazione QR e sue proprietà

Il nostro attuale obiettivo è fattorizzare matrici rettangolari. In questo senso ci viene incontro il seguente teorema: ogni matrice $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è fattorizzabile nella forma

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}, \tag{1}$$

con $\underline{\underline{Q}} \in \mathbb{R}^{m,m}$ ortogonale e $\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ avente elementi $r_{ij} = 0$ per $i > j$.

Commentiamo un po' con calma questo teorema. Prima di tutto questo afferma che, data una matrice rettangolare con m righe e n colonne, questa si può **sempre** scrivere come il prodotto di una matrice $\underline{\underline{Q}}$, quadrata, ortogonale, e di una certa matrice $\underline{\underline{R}}$; quest'ultima, non ha nulla a che vedere con la matrice della fattorizzazione di Choleski, anche se vengono sciaguratamente indicate con lo stesso nome. Questa matrice $\underline{\underline{R}}$ è **trapezoidale superiore**, ossia i suoi elementi sono disposti come un trapezio (se la triangolare ha gli elementi disposti come un triangolo, questa è come un trapezio). Per capire di cosa si sta parlando, concentriamoci solo per un momento sul caso *che ci interesserà di meno*, ossia $m < n$, e proviamo a calcolare la fattorizzazione QR su una matrice 5×8 ottenuta prendendo le prime 3 righe della matrice di Hilbert 6×6

```
>> A = hilb(6);
>> A = A(1:3,:)

A =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429    0.1250

>> [Q,R] = qr(A)

Q =
   -0.8571    0.5016    0.1170
   -0.4286   -0.5685   -0.7022
   -0.2857   -0.6521    0.7022

R =
   -1.1667   -0.6429   -0.4500   -0.3476   -0.2837   -0.2398
         0   -0.1017   -0.1053   -0.0970   -0.0876   -0.0791
         0         0    0.0039    0.0059    0.0067    0.0070
>>
```

In questo esempietto, viene fuori quello che abbiamo detto finora: data una matrice $\underline{\underline{A}}$ avente $m = 3$ righe, la matrice $\underline{\underline{Q}}$ è proprio 3×3. Potremmo dimostrare, calcolando i prodotti scalari tra le varie colonne, per esempio usando il comando

```
i=1; j=2;
Q(:,i)'*Q(:,j)
```

che questi sono sempre pari a 0 tranne nel caso $i = j$, dimostrando che quindi la matrice $\underline{\underline{Q}}$ è effettivamente ortogonale; oppure, si potrebbe verificare che `Q'*Q` è uguale alla matrice identità. Per quanto riguarda invece la matrice $\underline{\underline{R}}$, ciò che si vede è che sembra un po' una matrice triangolare, dove però abbiamo aggiunto a destra altre colonne, tutte piene; per questo motivo, gli elementi sembrano costituire un trapezio.

Concentriamoci adesso sul caso $m > n$, più interessante per gli scopi di questa sezione, e proviamo a generare una matrice 6×3 ritagliando le prime 3 colonne della matrice di Hilbert 6×6; poi, calcoliamone la fattorizzazione QR:

```
>> A = hilb(6);
>> A = A(:,1:3)

A =
    1.0000    0.5000    0.3333
    0.5000    0.3333    0.2500
    0.3333    0.2500    0.2000
    0.2500    0.2000    0.1667
    0.2000    0.1667    0.1429
    0.1667    0.1429    0.1250
>>
```

Proviamo a calcolare il determinante della sottomatrice 3×3 più alta:

```
>> det(A(1:3,1:3))

ans =
   4.6296e-04
>>
```

e vediamo che questo è diverso da zero; non è grandissimo, ma comunque molto meglio di 10^{-12} o cose del genere! Possiamo quindi dire che $\underline{\underline{A}}$ sia una matrice **di rango massimo**! Tra poco sarà chiaro il motivo di questa verifica; prima, guardiamo in faccia la fattorizzazione QR dell'intera matrice $\underline{\underline{A}}$ ottenuta come appena descritto:

```
>> [Q,R]=qr(A)

Q =
   -0.8189    0.5397   -0.1893    0.0051   -0.0235   -0.0428
   -0.4094   -0.3320    0.7024    0.0204    0.2631    0.3989
   -0.2730   -0.4219    0.1529   -0.4124   -0.5063   -0.5456
   -0.2047   -0.4067   -0.2015    0.8430   -0.1486   -0.1388
   -0.1638   -0.3735   -0.3963   -0.2262    0.7463   -0.2617
   -0.1365   -0.3399   -0.4998   -0.2600   -0.3081    0.6734

R =
   -1.2212   -0.7019   -0.5045
         0   -0.1385   -0.1511
         0         0   -0.0096
         0         0         0
         0         0         0
         0         0         0
>>
```

Sulla matrice $\underline{\underline{Q}}$ non c'è molto da dire che non sia già stato detto: è una matrice $m \times m$ ortogonale. Per quanto riguarda la matrice $\underline{\underline{R}}$, ci sono alcune osservazioni da fare: dalla $(n+1)$-esima riga in poi, tutti gli elementi sono nulli; inoltre, nelle prime n righe, la matrice, più che trapezoidale, sembra essere triangolare.

Ipotizziamo adesso di fare una variante a questa prova: definiamo sempre la matrice $\underline{\underline{A}}$ a partire da quella di Hilbert, ma poi facciamo in modo tale che le righe dalla terza alla sesta siano imposte uguale alla prima; in questo modo, la matrice $\underline{\underline{A}}$ sarà chiaramente di rango non massimo, poiché solo le prime due righe saranno linearmente indipendenti (e la matrice è 6×3). Calcoliamo anche per questa la fattorizzazione QR:

```
>> A = hilb(6);
>> A = A(:,1:3);
>> A(3,:)=A(1,:);
>> A(4,:)=A(1,:);
>> A(5,:)=A(1,:);
>> A(6,:)=A(1,:);
>> A % faccio scrivere su schermo la matrice A ora definita

A =
    1.0000    0.5000    0.3333
    0.5000    0.3333    0.2500
    1.0000    0.5000    0.3333
    1.0000    0.5000    0.3333
    1.0000    0.5000    0.3333
    1.0000    0.5000    0.3333

>> [Q,R] = qr(A)

Q =
   -0.4364    0.0976    0.8944         0         0         0
   -0.2182   -0.9759    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.4364    0.0976   -0.2236   -0.5000   -0.5000   -0.5000
   -0.4364    0.0976   -0.2236    0.8333   -0.1667   -0.1667
   -0.4364    0.0976   -0.2236   -0.1667    0.8333   -0.1667
   -0.4364    0.0976   -0.2236   -0.1667   -0.1667    0.8333


R =
   -2.2913   -1.1638   -0.7819
```

```
         0   -0.0813   -0.0813
         0         0    0.0000
         0         0         0
         0         0         0
         0         0         0
>>
```

Vediamo che, in questo caso, la matrice $\underline{\underline{R}}$ è trapezoidale, dal momento che anche la terza riga contiene tutti zeri (l'ultimo elemento ha un po' di sporcizia numerica, ma si potrebbe vedere che è estremamente piccolo rispetto agli altri elementi):

```
>> format short e
>> R

R =
  -2.2913e+00  -1.1638e+00  -7.8195e-01
            0  -8.1325e-02  -8.1325e-02
            0            0   5.7077e-17
            0            0            0
            0            0            0
            0            0            0
>>
```

Prima di trarre le conclusioni, una comunicazione: la fattorizzazione QR di una matrice non è unica; in altre parole, è possibile che esistano più coppie di matrici $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{R}}$ tali per cui $\underline{\underline{Q}}$ sia ortogonale, $\underline{\underline{R}}$ sia trapezoidale, e il loro prodotto coincida con la matrice $\underline{\underline{A}}$ di partenza. Il motivo per cui abbiamo proposto gli esperimenti numerici di prima, generando una matrice a rango massimo (tale per cui il determinante di almeno una delle sottomatrici 3×3 è diverso da 0) e una a rango non massimo (tale per cui il determinante di ogni sottomatrice 3×3 è uguale a 0), è il seguente teorema. Data $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ **di rango massimo**, avente più righe che colonne (ossia $m > n$), allora il fattore $\underline{\underline{R}}$ della fattorizzazione QR si può scrivere nella forma

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\widetilde{R}}} \\ \\ \underline{\underline{\widetilde{0}}} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

dove $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$ è una matrice triangolare superiore non singolare. Inoltre, in queste condizioni, la matrice $\underline{\underline{A}}$ può essere scritta nella forma

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\widetilde{Q}}}\,\underline{\underline{\widetilde{R}}}, \tag{3}$$

dove $\underline{\underline{\widetilde{Q}}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una matrice con m righe e n colonne avente i vettori colonna tra loro ortogonali. Infine, questo teorema garantisce che, pur non essendo unici nemmeno i fattori $\underline{\underline{\widetilde{Q}}}$ e $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$, tra tutti questi, esiste un'unica coppia $\underline{\underline{\widetilde{Q}}}^{(\mathrm{p})}$ e $\underline{\underline{\widetilde{R}}}^{(\mathrm{p})}$ tali per cui $\underline{\underline{\widetilde{R}}}^{(\mathrm{p})}$ abbia gli elementi diagonali positivi[1].

Il comando `qr` di MATLAB®permette di calcolare la fattorizzazione QR nelle due forme appena presentate. In particolare, il comando

```
[Q,R] = qr(A);
```

calcola i fattori `Q` avente dimensione $m \times m$ e `R` avente dimensione $m \times n$. Tuttavia, esiste un metodo alternativo di utilizzare il comando `qr`:

```
[Qt,Rt] = qr(A,0);
```

[1] io vedo il fatto di avere gli elementi della diagonale di $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$ positivi come una sorta di condizione aggiuntiva atta a rendere univoca, nel caso ci servisse per qualche motivo, la fattorizzazione QR di una matrice

Qui, i nomi delle variabili `Qtilda` e `Rtilda` sono stati da me scelti arbitrariamente (richiamando la tilda presente sulle matrici *rimpicciolite* di (3)), al fine di evidenziare che si tratta di matrici diverse da quelle immagazzinate in `Q` e `R`. Utilizzando il comando `qr(A,0)`, infatti, si chiede a MATLAB®di calcolare la cosiddetta **fattorizzazione QR economica**, ossia quella indicata in (3). Si tenga presente che MATLAB®, anche nel caso in cui il rango della matrice $\underline{\underline{A}}$ è massimo, **non** calcola la *unica fattorizzazione QR economica avente elementi diagonali di* $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$ *positivi*: calcola una delle varie possibilità non meglio definite.

6.2 Soluzione di sistemi lineari determinati

Facciamo un passo indietro, e parliamo ancora per un momento di sistemi lineari determinati, ossia la cui matrice di sistema $\underline{\underline{A}}$ è quadrata ($\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n,n}$) e a determinante non nullo. Proprio le fattorizzazioni PA=LU e di Choleski, anche la fattorizzazione QR può essere utilizzata per risolvere un sistema lineare determinato, ossia quello avente un'unica soluzione. Partiamo dalla ormai familiare espressione equazione matriciale

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b},$$

dove però possiamo dire che $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$. Sostituendo, si ottiene

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b}.$$

A questo punto, possiamo ricordare che, essendo $\underline{\underline{Q}}$ una matrice ortogonale, si ha

$$\underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}},$$

e questo ci suggerisce che, per far *sparire una matrice* e semplificare così i conti, potremmo semplicemente moltiplicare da sinistra entrambi i membri per $\underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}$, ottenendo:

$$\underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}\underline{b},$$

che si semplifica diventando

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}\underline{b}.$$

In effetti, questa procedura permette di non dover risolvere due sistemi lineari triangolari, ma solamente uno. Tuttavia, il costo della fattorizzazione QR è molto più alto rispetto alle fattorizzazioni LU o di Choleski; non lo riportiamo esplicitamente, perché esistono diverse tecniche che permettono di calcolare i fattori $\underline{\underline{Q}}$ e $\underline{\underline{R}}$, e non è scopo di queste note spiegarli. Basti dunque sapere che non conviene ricorrere alla fattorizzazione QR per la soluzione di un sistema lineare determinato, che è un problema che si può risolvere per le altre vie già presentate.

6.3 Soluzione di sistemi lineari sovradeterminati

6.3.1 Cos'è un sistema sovradeterminato?

Una delle applicazioni più interessanti in cui la fattorizzazione QR gioca invece un ruolo fondamentale è la soluzione di un sistema lineare **sovradeterminato**, ossia che presenta più equazioni che incognite. Si tratta di sistemi lineari in cui la matrice di sistema è rettangolare e avente più righe che colonne, ovvero il caso $m > n$ che abbiamo prima definito come *nostro prediletto*; ora è chiaro perché! ;-)

Quando si parla di problemi di questo tipo, può capitare che si incontrino i seguenti termini:

- può capitare di sentir parlare di *vincoli*; in questo contesto, *vincoli* è un sinonimo di *equazioni del sistema*: infatti, immaginando per esempio di avere un'equazione del tipo

  $$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,$$

  questa equazione *lega*, ossia *vincola*, x_1, x_2, x_3, a dover soddisfare questa relazione: *la somma del doppio di* x_1*, del triplo di* x_2 *e del quadruplo di* x_3 *è uguale a 1*: è un vincolo che lega le tre variabili!

- in contrapposizione ai vincoli si hanno i *gradi di libertà*, ossia le *incognite* del problema; queste si chiamano *gradi di libertà* perché al momento della soluzione del problema noi siamo liberi di *farle variare* fino a trovare quelli che soddisfano i vincoli.

Questi sinonimi sono molto utili perché ci permettono di poter comprendere intuitivamente alcuni punti del teorema di Rouché-Capelli; ammesso di aver a che fare con matrici di rango massimo, possiamo dire le seguenti frasi.

- In un sistema lineare determinato, si hanno n vincoli e n gradi di libertà; in questo modo, *ciascuno dei gradi di libertà può essere sfruttato per soddisfare un vincolo*.
- In un sistema lineare sottodeterminato si hanno m vincoli e $n > m$ gradi di libertà; sarebbe la situazione in cui si hanno più incognite che equazioni. Sistemi di questo tipo possono avere infinite soluzioni, perché m dei gradi di libertà possono essere usati per soddisfare i corrispondenti m vincoli, ma i restanti $n - m$ non hanno alcun vincolo da soddisfare e, quindi, possono *restare liberi*; per questo motivo, a seconda dei valori che usiamo, abbiamo diverse soluzioni, tutte valide!
- In un sistema sovradeterminato, si hanno m vincoli (assumendo che almeno $n + 1$ non siano ridondanti) e $n < m$ gradi di libertà; in altre parole, abbiamo più equazioni (di cui almeno $n + 1$ linearmente indipendenti) che incognite. Questo, in altre parole, significa che non tutti i vincoli potranno essere pienamente soddisfatti: alcuni lo saranno di più, alcuni lo saranno di meno, ma, poiché le diverse equazioni potranno dare luogo a *vincoli* tra loro incompatibili, non sarà possibile soddisfarli tutti con così pochi gradi di libertà!

Cercando di rendere meglio l'idea, proviamo a cercare di capire cosa comporta avere a che fare con sistemi sovradeterminati su un esempio molto semplice:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = 4. \end{cases}$$

Immaginiamo per un attimo di concentrarci solo sulle prime due equazioni, e di non guardare la terza; questo sarebbe uno di quei sistemi in cui il termine noto è costruito con la somma dei coefficienti moltiplicativi dei monomi a membro sinistro, quindi la soluzione sarebbe $x = 1$, $y = 1$. Tuttavia, immaginiamoci a questo punto di inserire questa soluzione nella terza equazione; troveremmo che

$$3x + 4y = 3 \times 1 + 4 \times 1 = 7 \neq 4,$$

quindi, disporre solo di due gradi di libertà, x e y, non permette di trovare una configurazione in grado di soddisfare tutti i tre vincoli. :-(

6.3.2 Il problema dei minimi quadrati

Si consideri un sistema sovradimensionato, sempre nella forma

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b},$$

dove però, da qui in poi, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, e $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, e $m > n$. Dall'esempio appena svolto, abbiamo capito che alcuni vincoli, alcune equazioni, potrebbero essere incompatibili con altri, e quindi, per soddisfare un'equazione, un'altra sarà insoddisfatta.

> «Va beh ma ci sarà un qualche modo di risolvere sistemi di questo tipo, o no?»

In effetti sì, però dobbiamo cambiare notevolmente il nostro punto di vista: tutto ciò che abbiamo sempre detto sui sistemi determinati e su che senso abbia risolverli, cambierà. In particolare, dobbiamo capire che il vettore delle incognite $\underline{x}$ che *risolve* un sistema sovradimensionato ha un significato un po' diverso rispetto a ciò a cui siamo abituati, con sistemi *determinati*. Per capirlo, può essere opportuno renderci conto di alcune implicazioni. Dire che l'equazione matriciale associata a un sistema lineare è soddisfatta significa, portando a membro sinistro il termine noto $\underline{b}$, che

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b} = \underline{0},$$

dove $\underline{0}$ è il vettore contenente tutti zeri. A questo punto, proviamo a calcolare la norma di ambo i membri (per ora non specifichiamo se 1, 2, o ∞); avremo:

$$\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\| = \|\underline{0}\| = 0.$$

Infatti, una delle proprietà di una norma è che essa è nulla **se e solo se** il vettore del quale la stiamo calcolando è uguale al vettore nullo. In altre parole, possiamo dire che la norma $\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\|$ è nulla se e solo se $\underline{x}$ è soluzione di un sistema nel *senso classico*, ossia se tutti i vincoli sono soddisfatti esattamente. Evidentemente, nel caso di un sistema sovradeterminato, non sarà possibile trovare un $\underline{x}$ tale per cui la norma in questione possa essere nulla. Però -e questo è il momento in cui dobbiamo cercare di cambiare il nostro punto di vista- possiamo cercare di **minimizzarla**, ossia trovare il vettore $\underline{x}$ tale per cui questa norma è **la più piccola possibile**. Questa procedura si può anche vedere in questo modo: immaginiamo di prendere tanti vettori $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, e provare, per ciascuno di essi, a calcolare $\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|$. A questo punto, possiamo definire $\underline{x}$ come quel vettore $\underline{y}$ tale per cui

$$\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\| = \min_{\underline{y}\in\mathbb{R}^n} \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|.$$

Se non possiamo fare sì che questa norma sia zero, possiamo cercare di trovare la minima: **questo è il senso di risolvere un sistema sovradeterminato**!

D'ora in avanti, concentriamoci non su una generica norma, bensì sulla norma 2 o *norma euclidea*. In questa condizione, la ricerca del vettore $\underline{x}$ tale per cui

$$\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\|_2 = \min_{\underline{y}\in\mathbb{R}^n} \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2 \tag{4}$$

è detta **problema dei minimi quadrati**, e $\underline{x}$ ne è dunque la soluzione.

Un primo risultato riguardante il problema dei minimi quadrati è espresso nel seguente teorema, che commenteremo punto-punto.

1. Data $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,n}$, con $m \geq n$, sia $\mathcal{X}$ l'insieme dei vettori soluzione $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ del problema dei minimi quadrati; allora, $\mathcal{X}$ è non vuoto.

   «Prima di tutto, $\mathcal{X}$ è l'insieme delle soluzioni del problema dei minimi quadrati $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, ossia l'insieme dei vettori $\underline{x}$ che minimizzano la norma $\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\|_2$. Parlo di insieme perché per ora nessuno ha detto che ce ne sia solo una, di soluzione. Possiamo quindi dire che questo insieme $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, ossia che sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$; ovvio: non è che tutti i vettori a n componenti reali siano soluzioni del problema dei minimi quadrati ;-). Questo pezzo di teorema afferma che $\mathcal{X}$ è non vuoto, ossia, in altre parole, che **esiste sempre soluzione al problema dei minimi quadrati**. Questo è, tutto sommato, ragionevole: dal momento che la soluzione del problema dei minimi quadrati non è una condizione così peculiare, ma genericamente *richiede di minimizzare una certa norma*, allora è ragionevole pensare che esista sempre *almeno* una situazione in cui questa norma è minima!»

2. Si ha che $\underline{x} \in \mathcal{X}$ per il sistema $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ se e solo se

   $$\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\,\underline{b} \tag{5}$$

   è esattamente soddisfatta. Tale sistema viene detto **sistema delle equazioni normali** o **sistema normale**.

   «Cerchiamo un po' di capire una cosa. La matrice $\underline{\underline{A}}$ ha m righe e n colonne, e stiamo ipotizzando $m > n$, ossia che $\underline{\underline{A}}$ è *più alta che larga*. Però, $\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}$ avrà quindi n righe e m colonne. Se moltiplichiamo da sinistra $\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}$ a $\underline{\underline{A}}$, il risultato finale avrà

n righe e n colonne. Da un certo punto di vista, è come se prendessimo $\underline{\underline{A}}$ e, in qualche senso, la *comprimessimo*, come se ne *buttassimo via alcune righe*. In questo senso, questo pezzo di teorema afferma che se non è possibile dire che, se *buttiamo via* un po' di informazioni, $\underline{x}$ può essere interpretata come soluzione *in senso classico* di un qualche sistema lineare: quello con matrice di sistema $\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}$. Almeno, possiamo ricondurci a concetti, a modi di definire la soluzione, che ci sono più familiari ;-)»

3. L'insieme $\mathcal{X}$ si riduce a un solo elemento $\underline{x}^*$ se e solo se la matrice $\underline{\underline{A}}$ ha rango massimo.

   «Nei punti precedenti del teorema abbiamo fornito alcuni risultati di esistenza, e alcune proprietà, delle nostre soluzioni; nessuno ha detto però nulla sul fatto che queste soluzioni possano essere uniche. In generale, la soluzione del problema dei minimi quadrati non è unica. Beh tutto sommato non è così irragionevole: se il nostro obiettivo è fare sì che la norma $\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2$ sia minima, beh, chi ce lo dice che non ci possano essere due vettori, $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$, che permettano di ottenere questa condizione? E chi ci dice che non ce ne possano essere anche più di due? Beh, questo teorema, ci fornisce un interessante dettaglio: se la matrice $\underline{\underline{A}}$ ha rango massimo, allora l'insieme delle soluzioni, $\mathcal{X}$, si riduce a un solo elemento $\underline{x}^*$; in altre parole, se la matrice ha rango massimo, la soluzione è **unica**!»

4. Esiste uno e un solo vettore $\underline{x} \in \mathcal{X}$ tale che

$$\|\underline{x}^*\|_2 = \min_{\underline{x}\in\mathcal{X}} \|\underline{x}\|_2\,,$$

   e questo vettore $\underline{x}^*$ viene detto **soluzione di minima norma**.

   «Però non è che siamo sicurissimi che la soluzione sia unica: mettiamo che $\underline{\underline{A}}$ non abbia rango massimo. Tuttavia, una cosa possiamo dirla: di tutte le possibili soluzioni del problema dei minimi quadrati, dunque $\underline{x} \in \mathcal{X}$, ne esiste solo una, $\underline{x}^*$, che ha norma minima. Anche questo ha senso: mettiamo che ci siano tante soluzioni, ossia tanti $\underline{x}$ che permettono di minimizzare la norma $\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\|_2$. Di tutti questi $\underline{x}$, però, non è così impensabile che solo uno possa avere norma minima; non sapendo dunque quale soluzione scegliere, nel caso ne avessimo molte, potremmo decidere di optare per essa: $\underline{x}^*$! Ovviamente, nel caso la soluzione sia invece unica, come al punto precedente, è ovvio che abbia anche norma minima: è l'unica! ;-)»

6.3.3 Soluzione del problema dei minimi quadrati: caso di matrici a rango massimo

Ipotizziamo di dover risolvere un problema dei minimi quadrati

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b},$$

in cui $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una matrice avente rango massimo. Nella precedente sezione abbiamo enunciato un teorema che ci ha insegnato che, in questa situazione, la soluzione del problema dei minimi quadrati è unica: quella che abbiamo indicato con $\underline{x}^*$. Inoltre, poiché abbiamo imparato che una soluzione del problema dei minimi quadrati, per essere davvero tale, deve essere la soluzione del sistema normale

$$\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\underline{b},$$

noi potremmo: ricordarci che la matrice $\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}}$ è simmetrica definita positiva, applicare la fattorizzazione di Choleski, e trovare la soluzione del problema dei minimi quadrati come soluzione **esatta**, ossia **in senso classico**, del sistema appena scritto. Tuttavia, è risaputo che una procedura del genere sarebbe numericamente molto instabile, dal momento che il sistema delle equazioni normali tende a essere molto mal condizionato.

Di conseguenza, ora studieremo il metodo **corretto** per risolvere il problema dei minimi quadrati, che si bassa sulla fattorizzazione QR. A questo fine, studiamo prima una proprietà delle matrici ortogonali e della norma 2 di un vettore. Come noto dalle sezioni precedenti, il quadrato della norma 2 di un vettore si può scrivere come il prodotto righe per colonne

$$||\underline{x}||_2^2 = \underline{x}^T \underline{x} = \underline{x}\,\underline{x}^T. \tag{6}$$

Si consideri a questo punto la norma

$$\left|\left|\underline{\underline{Q}}^T \underline{z}\right|\right|_2^2,$$

dove $\underline{z}$ è un vettore colonna e $\underline{\underline{Q}}$ è una matrice ortogonale. Allora, possiamo scrivere questa norma come prodotto righe per colonne dei seguenti vettori:

$$\left|\left|\underline{\underline{Q}}^T \underline{z}\right|\right|_2^2 = \left(\underline{\underline{Q}}^T \underline{z}\right)^T \left(\underline{\underline{Q}}^T \underline{z}\right) = \underline{z}^T \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T \underline{z},$$

tuttavia, come noto, essendo $\underline{\underline{Q}}$ ortogonale, il prodotto $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T$ è pari all'identità, dunque

$$\left|\left|\underline{\underline{Q}}^T \underline{z}\right|\right|_2^2 = \underline{z}^T \underline{\underline{I}}\,\underline{z} = \underline{z}^T \underline{z} = ||\underline{z}||_2^2. \tag{7}$$

Detto a parole, la norma di un vettore moltiplicato per una matrice ortogonale è uguale alla norma del vettore stesso, e questo **sempre**. Potremmo anche dire che le applicazioni lineari associate a matrici ortogonali appartengono alla classe delle *isometrie*; se infatti il concetto di norma viene utilizzato per definire una sorta di *lunghezza del vettore*, se moltiplicare un vettore per una matrice ortogonale non ne cambia la lunghezza, allora è sensato dire che questa sia un'isometria, una applicazione che non cambia le lunghezze. In effetti, l'Appendice A utilizza come esempio di matrice ortogonale quella che rappresenta l'operazione di rotazione su un piano.

Ora che disponiamo di questa fantastica proprietà, cerchiamo di utilizzarla in qualche modo. Come abbiamo già detto in precedenza, il problema dei minimi quadrati è trovare il $\underline{x}$ definito in (4). Partiamo quindi dal membro destro, ossia dalla quantità che vogliamo minimizzare, ed eleviamola al quadrato: se troviamo un $\underline{y}$ tale per cui la norma è minima, non vedo perché il quadrato della norma non debba essere più minimo:

$$\left|\left|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right|\right|_2^2$$

Il motivo dietro a questa elevazione al quadrato è il nostro desiderio di sfruttare la proprietà appena introdotta. Usiamola però *al contrario*, ossia, usiamola per far *apparire* dentro al segno di norma la nostra matrice ortogonale $\underline{\underline{Q}}^T$; come potete immaginare, di tutte le matrici ortogonali, scegliamo proprio la $\underline{\underline{Q}}$ della fattorizzazione QR ;-)

$$\left|\left|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right|\right|_2^2 = \left|\left|\underline{\underline{Q}}^T \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right)\right|\right|_2^2 = \left|\left|\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underbrace{\underline{\underline{Q}}^T \underline{b}}_{\underline{c}}\right|\right|_2^2,$$

dove abbiamo implicitamente definito $\underline{c}$ come

$$\underline{c} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{b}.$$

Ricordiamoci a questo punto della definizione di fattorizzazione QR (1); se

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}},$$

possiamo moltiplicare da sinistra ambo i membri per $\underline{\underline{Q}}^T$, ottenendo

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}},$$

ma $\underline{\underline{Q}}$ è ortogonale, e quindi il prodotto a membro destro si riduce all'identità, così che abbiamo appena dimostrato che

$$\underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}},$$

e possiamo sostituirlo dentro al nostro segno di norma, ottenendo

$$\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2^2 = \left\|\underline{\underline{R}}\,\underline{y} - \underline{c}\right\|_2^2.$$

Ovviamente, visto che abbiamo scelto come matrice $\underline{\underline{Q}}$ da far apparire dentro la norma *proprio quella della fattorizzazione QR*, vien da sé che anche $\underline{\underline{R}}$ *è proprio quella della fattorizzazione QR*. Questa sezione, tuttavia, si concentra sul caso di matrice $\underline{\underline{A}}$ avente rango massimo e, quindi, valgono le ipotesi che ci permettono di scrivere $\underline{\underline{R}}$ secondo (2):

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\widetilde{R}}} \\ \underline{\underline{\widetilde{0}}} \end{bmatrix},$$

dove $\underline{\underline{\widetilde{R}}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice triangolare superiore non singolare, e $\underline{\underline{\widetilde{0}}} \in \mathbb{R}^{m-n,n}$ è una matrice rettangolare contenente tutti zeri. Poiché dentro il segno di norma si sta calcolando la differenza di $\underline{\underline{R}}\,\underline{y}$ e $\underline{c}$, dal momento che tratteremo in modo diverso il blocco superiore di $\underline{\underline{R}}$, associato al sistema triangolare con matrice $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$, e il blocco inferiore, ha senso considerare il vettore $\underline{c} = \underline{\underline{Q}}^{\mathrm{T}}\underline{b}$ come diviso in due parti analoghe:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \end{bmatrix},$$

dove $\underline{c}_1 \in \mathbb{R}^n$ è il vettore contenente le prime n componenti (n proprio come la dimensione di $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$), mentre $\underline{c}_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ contiene le restanti $m-n$ componenti). Allora, possiamo riscrivere la norma come:

$$\left\|\underline{\underline{R}}\,\underline{y} - \underline{c}\right\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix} \underline{\underline{\widetilde{R}}}\,\underline{y} \\ \underline{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \end{bmatrix}\right\|_2^2,$$

infatti ricordiamo che $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$; dal momento che viene moltiplicato per $\underline{\underline{\widetilde{0}}}$, nella parte inferiore esso non conta nulla, e si ottiene un vettore $\underline{0}$ avente $m-n$ componenti, tutte nulle. Infine, possiamo ancora svolgere un piccolo passaggio, ottenendo:

$$\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2^2 = \left\|\underline{\underline{R}}\,\underline{y} - \underline{c}\right\|_2^2 = \left\|\underline{\underline{R}}\,\underline{y} - \underline{c}\right\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix} \underline{\underline{\widetilde{R}}}\,\underline{y} - \underline{c}_1 \\ \underline{c}_2 \end{bmatrix}\right\|_2^2. \tag{8}$$

Qui avremmo dovuto mettere $-c_2$ al denominatore, ma, essendo sotto il segno di norma ed essendo l'unico termine (sopra essendoci una differenza, dovremmo o cambiare entrambi i segni o tenere così), possiamo buttare via il segno $-$. Questa espressione è il punto di arrivo, che ci permetterà di trarre delle conclusioni. Infatti, il nostro obiettivo iniziale era ottenere $\underline{x}^*$ secondo la seguente espressione:

$$\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x} - \underline{b}\right\|_2 = \min_{\underline{y}\in\mathbb{R}^n} \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2.$$

Tuttavia, le manipolazioni che abbiamo fatto al membro destro ci permettono di capire con grande semplicità qual è il $\underline{y}$ che stiamo cercando: è semplicemente la soluzione del sistema lineare

$$\underline{\underline{\widetilde{R}}}\,\underline{x}^* = \underline{c}_1.$$

Infatti, $\underline{\underline{\widetilde{R}}}$ è una matrice $n \times n$ triangolare superiore e non singolare, grazie all'ipotesi di $\underline{\underline{A}}$ a rango pieno, e quindi il sistema appena scritto ammette soluzione **esatta**; di conseguenza, scegliendo $\underline{y} = \underline{x}^*$, abbiamo

$$\min_{\underline{y}\in\mathbb{R}^n} \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2 = \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* - \underline{b}\right\|_2 = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ \underline{c}_2 \end{bmatrix}\right\|_2 = \|\underline{c}_2\|_2$$

e, poiché questo procedimento ci ha permesso di sostituire avere un $\underline{0}$ nel blocco superiore dell'espressione in (8), possiamo sicuramente dire che la soluzione che cercavamo, ovvero la soluzione nel senso dei minimi quadrati, è certamente coincidente con la soluzione del sistema lineare determinato $\underline{\underline{\widetilde{R}}}\,\underline{x}^* = \underline{c}_1$.

Cerchiamo di riassumere cosa abbiamo fatto. Se consideriamo (8), ricordando che tutti i nostri gradi di libertà sono in $\underline{y}$, noi possiamo cercare di minimizzare solamente il termine superiore, ma possiamo cambiare $\underline{y}$ quanto vogliamo, e il termine inferiore, quello contenente $\underline{c}_2$, non cambierà di nulla. Questo modo di riscrivere, grazie alla fattorizzazione QR, l'argomento della norma $\left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2$, ha permesso di decomporlo in due blocchi: uno *modificabile* dai gradi di libertà, l'altro no. In un sistema lineare determinato, tutti i vincoli sono raggiungibili dai gradi di libertà, ma questo è un sistema sovradeterminato, e quindi la soluzione sarà corretta a meno di un certo residuo. Questo residuo, abbiamo capito, è pari a

$$\min_{\underline{y}\in\mathbb{R}^n} \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{y} - \underline{b}\right\|_2 = \left\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^* - \underline{b}\right\|_2 = \|\underline{c}_2\|_2 .$$

Nel caso $\|\underline{c}_2\|_2 = 0$, il sistema ammette soluzione nel senso classico.

Soluzione del problema dei minimi quadrati: caso di matrici a rango non massimo

Senza voler fornire un formalismo eccessivo, questa sezione vuole, utilizzando il concetto di nucleo di un'applicazione lineare, accennare quale sia il problema nel caso di matrici a rango non massimo. Immaginando di dover risolvere un sistema sovradeterminato

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b},$$

nel caso la matrice $\underline{\underline{A}}$ avesse rango non massimo, significherebbe che il suo nucleo conterrebbe dei vettori non banali. Sia per esempio $\underline{z} \in \ker\{\underline{\underline{A}}\}$; allora,

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{z} = \underline{0},$$

infatti, gli elementi del nucleo di una matrice sono quelli che, se vi si moltiplica la matrice da sinistra, vengono mappati nel vettore nullo.

Detto questo, immaginiamo che $\underline{x} \in \mathcal{X}$, ossia che $\underline{x}$ sia una soluzione del problema dei minimi quadrati; allora, anche $\underline{x} + \underline{z}$ lo sarà! Infatti, dato $\alpha \neq 0$,

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{x} + \alpha\underline{z}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \alpha\underline{\underline{A}}\,\underline{z} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}.$$

Quindi, esistono moltissime soluzioni al problema dei minimi quadrati, per colpa di questo $\underline{z}$! Tuttavia, qualche sezione fa abbiamo detto che, tra tutti gli $\underline{x} \in \mathcal{X}$, ne esiste solamente uno, $\underline{x}^*$, avente norma euclidea minima. Se decidessimo che questa, in questi casi, è la soluzione che ci interessa, potremmo trovare un modo di calcolarlo. Questo modo, però, richiede l'utilizzo della decomposizione ai valori singolari, che studieremo più avanti.

6.3.4 Calcolo della retta di regressione

Un esempio di applicazione in cui è fondamentale utilizzare i sistemi sovradimensionati è il calcolo della retta di regressione. Il concetto di retta di regressione in qualche senso è imparentato con l'approssimazione di dati e funzioni, precedente argomento di questo testo. Il principio però è piuttosto diverso: immaginiamo di avere a che fare con molti dati di un esperimento che sembrano suggerire che l'andamento di un fenomeno sia lineare, quindi che il fenomeno si possa descrivere mediante una retta. Nella precedente sezione, però, abbiamo visto che, dati $n+1$ punti, volendo *interpolare*, ossia volendo trovare una funzione che *passi per ciascun punto*, serve usare un polinomio di grado n. Ma qui noi non vogliamo *interpolare*: noi qui vogliamo trovare una retta che sia *vicina* a questi punti, ma che non passi necessariamente per essi. Consideriamo quindi un polinomio nella forma

$$p(x) = c_1 x + c_2,$$

che approssimi *nel senso dei minimi quadrati* il set di dati forniti in Tabella 1; qui, possiamo immaginare di usare come ascisse lo sforzo applicato al campione, e come ordinate il risultato ottenuto, ossia la deformazione del campione conseguente all'applicazione dello sforzo. Decidiamo quindi che gli $\{x_i\}$ sono i valori degli sforzi applicati, e gli $\{y_i\}$ i valori delle conseguenti deformazioni; in questo esempio, $i = 1, \ldots, 8$. Trovare i coefficienti c_1 e c_2 richiederà ovviamente un sistema sovradeterminato; infatti, si cercherebbe di soddisfare i seguenti vincoli:

$$
\begin{cases}
c_1 x_1 + c_2 = y_1 \\
c_1 x_2 + c_2 = y_2 \\
c_1 x_3 + c_2 = y_3 \\
c_1 x_4 + c_2 = y_4 \\
c_1 x_5 + c_2 = y_5 \\
c_1 x_6 + c_2 = y_6 \\
c_1 x_7 + c_2 = y_7 \\
c_1 x_8 + c_2 = y_8,
\end{cases}
$$

che può essere riscritto in forma matriciale come

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ x_6 & 1 \\ x_7 & 1 \\ x_8 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}
\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{c}^*}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}
$$

Questo sistema sovradeterminato può essere risolto, grazie a MATLAB®, mediante il solito, mitico comando \, anche se non si tratta di sistemi quadrati; MATLAB® farà esattamente tutto quello che è stato descritto prima: calcolerà la fattorizzazione QR e troverà la soluzione del sistema $\underline{\underline{\widetilde{R}}}\,\underline{y} = \underline{c}_1$.

Segue uno script che propone un'implementazione esplicita di tutto il metodo prima descritto.

```
% Calcolo della retta di regressione mediante fattorizzazione QR

clear
close all
clc

% Inserisco i dati in MATLAB
x = [0 0.06 0.14 0.25 0.31 0.47 0.60 0.70];
y = [0 0.08 0.14 0.20 0.23 0.25 0.28 0.29];

% La matrice di sistema, A, come appena dimostrato, contiene il vettore
% delle x, e un vettore con tutti 1
A = [x' ones(8,1)];
%
n = size(A,2); % n e` il numero di colonne di A
%
% Il vettore dei termini noti contiene le y
b = y';

[Q,R] = qr(A); % calcolo fattorizzazione QR della matrice
c = Q'*b; % calcolo il vettore c come definito nelle dimostrazioni
c1 = c(1:n); % in questo caso n=2, quindi c1 sara` dato dalle prime 2
             % componenti del vettore c
c2 = c(n+1:end); % questo sara` il vettore da cui prenderemo i residui
Rtilda = R(1:n,1:n);
c_star = Rtilda\c1; % trovo la soluzione come soluzione del sistema
%
% Questo c_star e` imparentato con polyfit/polyval; infatti, si tratta dei
% coefficienti di un polinomio di grado 1; ma allora, posso anche
% utilizzare con polyval questi coefficienti!

% Definisco una griglia fine per disegnare la retta
z = linspace(-0.2,0.9,1001);
p = polyval(c_star,z);
```

```
% Calcolo il residuo
res = norm(c2)

% Disegno i dati da approssimare con cerchietti rossi e la retta in blu
figure
hold on
grid on
plot(x,y,'ro',z,p,'b','LineWidth',2)
```

Alternativamente a usare la fattorizzazione QR, è possibile, come già detto, usare il comando \. Qua si propone un'implementazione della cosa.

```
% Calcolo della retta di regressione mediante soluzione di un sistema
% lineare sovradimensionato grazie al comando \

clear
close all
clc

% Inserisco i dati in MATLAB
x = [0 0.06 0.14 0.25 0.31 0.47 0.60 0.70];
y = [0 0.08 0.14 0.20 0.23 0.25 0.28 0.29];

% La matrice di sistema, A, come appena dimostrato, contiene il vettore
% delle x, e un vettore con tutti 1
A = [x' ones(8,1)];

% Il vettore dei termini noti contiene le y
b = y';

% Uso il comando \ per trovare il residuo
c_star = A\b;

% Definisco una griglia fine per disegnare la retta
z = linspace(-0.2,0.9,1001);
p = polyval(c_star,z);

% Disegno i dati da approssimare con cerchietti rossi e la retta in blu
figure
hold on
grid on
plot(x,y,'ro',z,p,'b','LineWidth',2)
```

Il metodo più popolare per il calcolo della retta di regressione, tuttavia, è basato sul già noto comando `polyfit`. Infatti, questo comando presenta tre argomenti: le `x`, le `y`, ma anche il grado del polinomio. Nell'ambito dei polinomi interpolatori, avevamo sempre scelto, come grado del polinomio, il numero di nodi di interpolazione meno 1. Tuttavia, nel caso introducessimo un numero inferiore, come 1, invece di interpolare, otteniamo l'approssimazione nel senso dei minimi quadrati della funzione con un polinomio di grado 1: una retta! Viene ora riportata un'implementazione MATLAB®anche con questo metodo. Si noti che, nel caso si volesse calcolare il residuo, non è necessario passare dal metodo con la fattorizzazione QR e ricavare il vettore $\underline{c}_2$. Infatti, il residuo si puo' calcolare facendo `polyval` sugli stessi dati $\underline{x}$ da cui siamo partiti, e calcolando la differenza tra le p così trovate e le y di partenza; nel caso del polinomio interpolante, questo sarebbe stato nullo, dal momento che le condizioni di interpolazione sarebbero state soddisfatte esattamente, ma qui non abbiamo abbastanza gradi di libertà e così ci sarà un errore di approssimazione anche per i dati di partenza!

```
% Calcolo della retta di regressione mediante fattorizzazione QR

clear
close all
clc

% Inserisco i dati in MATLAB
x = [0 0.06 0.14 0.25 0.31 0.47 0.60 0.70];
y = [0 0.08 0.14 0.20 0.23 0.25 0.28 0.29];

% Calcolo c_star mediante il comando polyfit, usando come grado 1
c_star = polyfit(x,y,1);

% Definisco una griglia fine per disegnare la retta
z = linspace(-0.2,0.9,1001);

% Uso polyval per valutare il polinomio
p = polyval(c_star,z);
```

Tabella 1: Esempio di dati sperimentali: legame tra sforzo applicato su un campione di disco intervertrebrale, e relativa deformazione.

Sforzo σ, MPa	Deformazione ε, cm
0.00	0.00
0.06	0.08
0.14	0.14
0.25	0.20
0.31	0.23
0.47	0.25
0.60	0.28
0.70	0.29

```
% Disegno i dati da approssimare con cerchietti rossi e la retta in blu
figure
hold on
grid on
plot(x,y,'ro',z,p,'b','LineWidth',2)

% Calcolo il residuo
p = polyval(c_star,x);
res = norm(p-y,2)
```

A Matrici ortogonali

«Ma che vuol dire che una matrice è ortogonale?!»

Per liquidare questa domanda potremmo semplicemente ricordare una definizione fornita qualche sezione fa; una matrice quadrata $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m,m}$ si dice **ortogonale** se

$$\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{I}},$$

dove $\underline{\underline{I}}$ è la matrice identità. Detto così, non mi fa capire molto. Volendo però guardare in faccia meglio questa definizione, ripetendo qualcosa di già accennato, ricordiamo che l'inversa di una matrice $\underline{\underline{A}}$, indicata con $\underline{\underline{A}}^{-1}$, si definisce tale per cui

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}.$$

Le due definizioni appena viste si somigliano molto, non fosse che in un caso si ha la trasposta, nell'altro l'inversa. Ma questo inizia già a suonarmi meglio: **le matrici ortogonali sono quelle matrici che hanno l'inversa uguale alla loro trasposta!** Insomma, questo è già più carino, perché insomma a me piace di più calcolare la trasposta di una matrice, che è una banalissima operazione di scambio righe e colonne, piuttosto che un'inversione che è (penso) la più complicata delle operazioni che si possano effettuare su una matrice. Quindi, che queste matrici ortogonali abbiano qualcosa di speciale, è cosa chiara. Però c'è ancora una cosa che da qui sfugge: ma perché queste matrici vengono chiamate proprio **ortogonali**? Cioè, il concetto di ortogonalità è un qualcosa che, più che a una matrice, viene bene legare a dei vettori, a dei segmenti: due segmenti ortogonali sono perpendicolari, formano insomma un angolo retto.

Per cercare di capire cosa c'entrino gli angoli retti con le matrici, concentriamoci su un esempio molto popolare: la cosiddetta **matrice di rotazione**

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Questa matrice viene chiamata così perché, se viene moltiplicata da sinistra a un vettore colonna, lo ruota di un angolo pari a φ, in senso antiorario[2]; in altre parole, questa è la rappresentazione matriciale dell'applicazione lineare di rotazione di un vettore su un piano. Cercando di essere

[2]volendo ottenere la rotazione in senso orario è sufficiente usare un φ negativo, oppure usarne uno positivo e scambiare il segno dei due seni nella matrice

concreti, fissiamo un certo valore di φ, per esempio $\varphi = 30°$. In questa condizione, la matrice di rotazione $\underline{\underline{A}}$ sarà

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Se per esempio prendessimo il vettore $\underline{x} = [1 \ \ 0]^{\mathrm{T}}$ e gli moltiplicassimo la matrice appena presentata da sinistra, otterremmo

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

che è proprio il vettore $\underline{x}$, ruotato di 30°!

Tornando a noi, definiamo $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ i due vettori colonna ottenuti rispettivamente dalla prima e dalla seconda colonna di questa matrice:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

In Algebra Lineare, ma pure in Fisica, si parla di ortogonalità tra due vettori quando il loro prodotto scalare è nullo. Per vedere cosa succede qui, valutiamo il prodotto scalare tra $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$; questo si può calcolare per esempio usando il prodotto riga per colonna, trasponendo uno dei due vettori e moltiplicandoli:

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1^{\mathrm{T}} \underline{v}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Sorpresi? Qui le cose iniziano a farsi chiare sul serio! Cioè, costruiamo tanti vettori colonna, ciascuno con una colonna della matrice; calcoliamo il prodotto scalare tra due di questi vettori, e scopriamo che fa 0. Non solo: proviamo a questo punto a calcolare il prodotto scalare tra $\underline{v}_2$ e sé stesso:

$$\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_2^{\mathrm{T}} \underline{v}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

E potremmo scoprire che anche $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = 1$. Ma non è finita qui: tutto questo può essere anche rappresentato graficamente, per $\mathbb{R}^2$, in cui è possibile identificare la prima e la seconda componente come ascisse x e ordinate y di un piano cartesiano. È possibile disegnare, come fatto in Fig. 1, i due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ su un piano cartesiano, rispettivamente in colore rosso e blu[3]. Questa rappresentazione grafica consiste semplicemente nel mostrare i segmenti che uniscono l'origine degli assi alle coordinate (x, y), le quali sono identificate con le componenti di $\underline{v}_1 = [x_1 \ \ y_1]^{\mathrm{T}}$ e $\underline{v}_2 = [x_2 \ \ y_2]^{\mathrm{T}}$. Dal grafico appare chiaramente che i due vettori sono perpendicolari, ossia che tra loro è presente un angolo pari a 90°. Il seguente script:

```
clear
close all
clc

theta = 30; % gradi

% Scrivo l'espressione della matrice di rotazione; si noti che le funzioni
% sin e cos su MATLAB accettano radianti, quindi bisogna convertire da
```

[3]questo permette di capire ancora meglio cosa significhi *matrice di rotazione*: le righe rossa e blu sono un po' come gli assi x e y, soggetti alla rotazione; è evidente che se moltiplicheremo da sinistra la matrice di rotazione a qualsiasi vettore del nostro spazio, questo sarà ruotato di φ, come in questo esempio

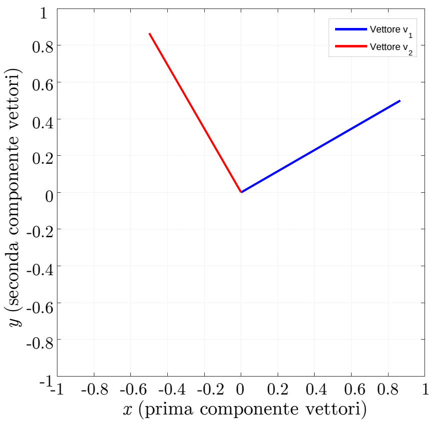

Figura 1: Rappresentazione geometrica dei vettori $\underline{v}_1$ (blu) e $\underline{v}_2$ (rosso) ottenuti dalle colonne della matrice di rotazione.

```
% gradi a radianti
A = [cos(theta*pi/180) -sin(theta*pi/180);
     sin(theta*pi/180) cos(theta*pi/180)];

v1 = A(:,1); % definisco v1 come la prima colonna di A
v2 = A(:,2); % definisco v2 come la seconda colonna di A

figure
set(gcf,'Position',[616 226 627 571])
grid on
hold on
box on
% Disegno i due vettori come i segmenti che congiungono l'origine [0,0] con
% il vettore [v1(1),v1(2)], e idem per [v2(1),v2(2)].
plot([0,v1(1)],[0,v1(2)],'b','LineWidth',2) % plot vettore v1
plot([0,v2(1)],[0,v2(2)],'r','LineWidth',2) % plot vettore v2
%
% faccio in modo che MATLAB non riscali gli assi ma attribuisca ad ascisse
% e ordinate la stessa scala: le stesse distanze su x e y hanno lo stesso
% significato
axis equal
% faccio in modo che MATLAB disegni il piano sia per x sia per y
% nell'intervallo [-1,1] x [-1,1]
axis([-1,1,-1,1])
xlabel('x (prima componente vettori)')
ylabel('y (seconda componente vettori)')
legend('Vettore v_1','Vettore v_2','Location','NorthEast')

prodotto_scalare = v1'*v2
```

permette di disegnare i due vettori ottenuti dalla matrice di rotazione per un generico valore di ϑ, che si può fissare all'inizio del codice.

Per riassumere quanto abbiamo appena capito, una matrice ortogonale è una matrice le cui colonne sono vettori tra di loro ortogonali. Dati $\underline{v}_i$, $\underline{v}_j$ il i-esimo e il j-esimo vettore colonna, quindi, dire che questi sono ortogonali corrisponde a dire che:

$$\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

ossia che il loro prodotto scalare è uguale a 1 solo se si considera lo stesso vettore, e 0 nel caso i vettori fossero stati costruiti a partire da colonne diverse. Questa definizione è valida in m dimensioni, ossia per vettori dotati di m componenti, ma, per $m = 2$ (e con un po' di fatica in più $m = 3$) è anche possibile interpretarla geometricamente, in termini della presenza di un angolo retto tra i due vettori.